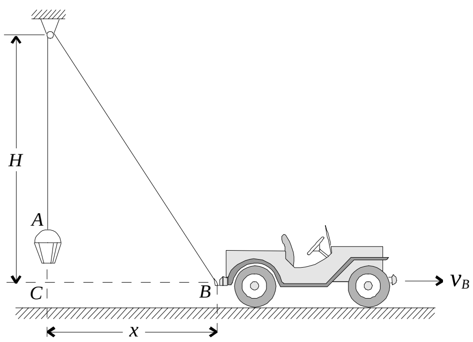
# Mecánica clásica

## Práctico I – Cinemática de la Partícula y Movimiento Relativo.

### Parte A: Ejercicios de Cinemática de la Partícula.

**Ejercicio Nº 1**




Una cuerda flexible, inextensible y sin peso[1] de longitud $2H$ está unida, en uno de sus extremos (A), a un balde que se mueve verticalmente. Luego de pasar por una roldana, que se encuentra a una altura $H$ del piso, el otro extremo de la cuerda está atado a un jeep que se mueve horizontalmente con velocidad $v_B$ constante. (Ver Figura)

Determinar la velocidad $v$ y la aceleración $a$ del balde en función de la posición del jeep, $x$, que la medimos de forma que cuando $x = 0$ los dos extremos $A$ y $B$ de la cuerda coinciden en la posición $C$.

**Ejercicio Nº 2**

Un avión que vuela horizontalmente a 200 km/h se encuentra a una distancia horizontal $d$, detrás de un vehículo que se mueve en la misma dirección y sentido a 100 km/h. El avión dispara un proyectil, también horizontalmente, con una velocidad relativa de salida de 700 km/h.

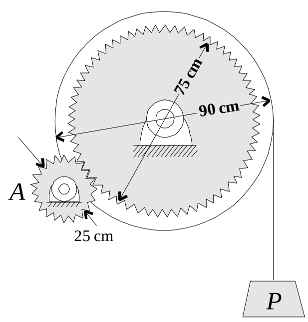
a) Si el avión vuela a una altura de 2 km, calcular $d$, para que el proyectil caiga sobre el vehículo.

b) ¿A qué distancia horizontal del vehículo se encuentra el avión en el instante del impacto?

**Ejercicio Nº 3**

En el dispositivo elevador de la figura, el sistema de dientes de los engranajes asegura que el piñón A rueda sin deslizar[2] respecto al piñón $B$. El piñón $A$ alcanza una velocidad de 900 rpm en 10s partiendo del reposo con aceleración constante.

Determinar cuál es la aceleración $a$ del peso $P$.




[1] - Que llamaremos *f.i.s.p.* de aquí en más.
[2] - Entendemos porque un cuerpo rueda sin deslizar sobre otro, que la velocidad del punto de contacto de ambos cuerpos es la misma.

**Ejercicio Nº 4**

Una partícula está obligada a moverse sobre una guía circular de radio R con velocidad relativa a ella de módulo $v_r$ constante, la guía gira en torno a un eje de su plano que pasa por su centro con velocidad angular $\omega$ constante.

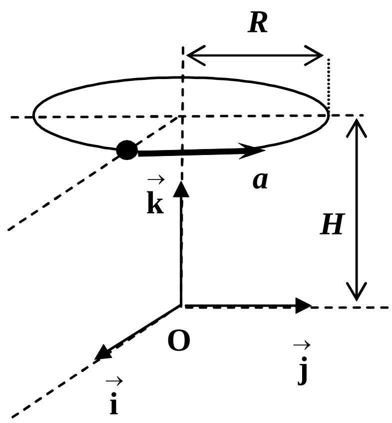
Calcular la velocidad y la aceleración de la partícula, vistas en el sistema donde la guía está girando. (Sugerencia: elegir convenientemente un sistema de coordenadas esféricas).

**Ejercicio Nº 5**

Consideremos una partícula que está obligada a moverse sobre una circunferencia de radio *R*, paralela al plano $O\vec{\mathbf{i}}\,\vec{\mathbf{j}}$, centrada respecto al eje $O\vec{\mathbf{k}}$, y a una altura ***H*** respecto a dicho plano, de forma que $\frac{R}{H}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. El movimiento de la partícula es tal que la componente tangencial de su aceleración es constante ($\ddot{s}=a$, constante).

Inicialmente la partícula se encuentra en la posición indicada en la figura, con velocidad inicial nula. La aceleración tangencial inicial es según el eje $O\vec{\mathbf{j}}$.

Escribir, para todo instante posterior, el vector aceleración, el vector velocidad y la ley horaria en coordenadas intrínsecas. Escribir también el triedro de Frenet en la base cartesiana.




**Ejercicio Nº 6**

Una partícula *P* está sometida a una aceleración de la forma $\vec{a}=-\omega^2 R\,\vec{e}_\rho$ expresada en coordenadas cilíndricas, siendo $\omega$ y *R* constantes. En el instante inicial la partícula se encuentra a una distancia *R* del eje Oz y tiene una velocidad de la forma:

$$\vec{v}(0)=R\omega\,\vec{e}_\varphi+v_0\,\vec{k}$$

a) Hallar las leyes horarias del movimiento en coordenadas cilíndricas.

Sugerencia: Observar que la aceleración es de un tipo de movimiento conocido pero que las condiciones iniciales son diferentes, por lo que se recomienda buscar soluciones de distancia al eje Oz constante.

b) Escribir esas ecuaciones en coordenadas cartesianas y decir de qué tipo de trayectoria se trata.

c) Escribirlas ahora en coordenadas intrínsecas, escribiendo también los versores del triedro de Frenet en función de los de la base de coordenadas cilíndricas.

d) Darle interpretación física a las cantidades $c=\sqrt{(R\omega)^2+(v_0)^2}$ y el ángulo $\alpha$ definido por $cos\,\alpha=\frac{R\omega}{c}$ y $sen\,\alpha=\frac{v_0}{c}$. Estudiar el movimiento discutiendo según sea $R\omega >> v_0$ o $R\omega << v_0$.

## Parte B: Ejercicios de Movimiento Relativo.

### Ejercicio Nº 7

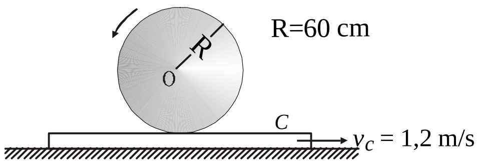
Un niño se encuentra, en t = 0, en el centro de una calesita que gira con velocidad $\omega$ constante. En ese instante, el niño comienza a moverse a lo largo de un radio dibujado en el piso de la calesita con una velocidad constante $v_0$ relativa a la misma.

a) Hallar la velocidad y aceleración absolutas del niño trabajando en el sistema móvil, es decir expresarlas en los versores del sistema móvil.

b) Idem (a) pero respecto a los versores del sistema absoluto.

### Ejercicio Nº 8

Una rueda, de radio $R$ = 60 cm, está rodando sin deslizar sobre una placa horizontal (ver figura). Ésta a su vez, tiene una velocidad de 1,2 m/s hacia la derecha, y la rueda una velocidad angular de 0,5 rad/s en el sentido contrario al de las agujas del reloj.




Llamémosle $v_0$ a la velocidad del centro $O$ de la rueda.

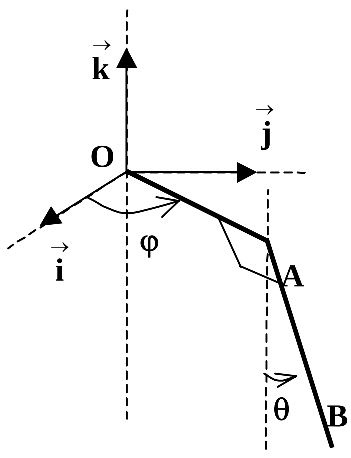
a) Escribir la velocidad de punto de contacto P entre la rueda y la placa expresada como:

- Un punto fijo a la placa.
- Un punto solidario a la rueda. Dejarlo expresado en función de $v_0$.

b) Determinar la velocidad $v_0$ del centro O de la rueda, para que se cumpla la condición de rodadura sin deslizamiento.

### Ejercicio Nº 9

En el sistema de la figura, la barra OA está contenida en el plano $O\vec{\mathbf{i}}\,\vec{\mathbf{j}}$ y gira alrededor de $O\vec{\mathbf{k}}$. La barra AB está contenida en un plano perpendicular a OA y gira alrededor de ésta última.

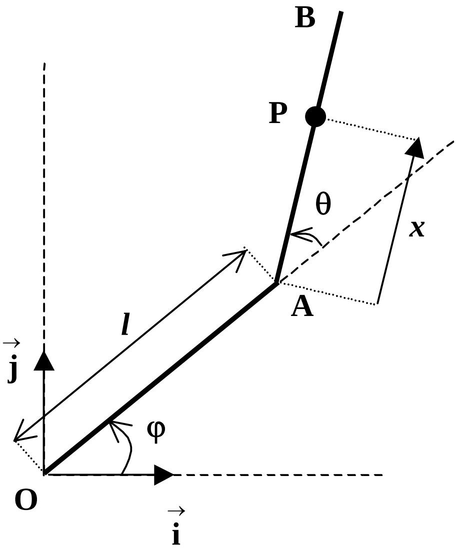



a) Determinar la velocidad angular de la barra AB en función de φ (ángulo entre la barra OA y el eje $O\vec{\mathbf{i}}$ ) y θ (ángulo entre la barra AB y una paralela al eje $O\vec{\mathbf{k}}$ por el punto A).

b) Expresar dicha velocidad angular en una base solidaria a *AB.*

## Ejercicio N° 10

Consideremos la configuración de las barras que se muestra en la Figura. Una barra *OA*, de longitud *l*, gira entorno a uno de sus extremos (*O*), que se encuentra fijo, de manera que siempre está contenida en el mismo plano. El ángulo que forma con el eje $O\vec{i}$ es $\varphi(t)$. La segunda barra *AB* está unida a ella en el punto *A* y gira respecto a este punto. El ángulo entre ella y la *OA* es $\theta(t)$ y ambas barras siempre se encuentran contenidas en el mismo plano. Una partícula *P* se mueve sobre la barra *AB*, siendo $x(t)$ su distancia al punto *A*.



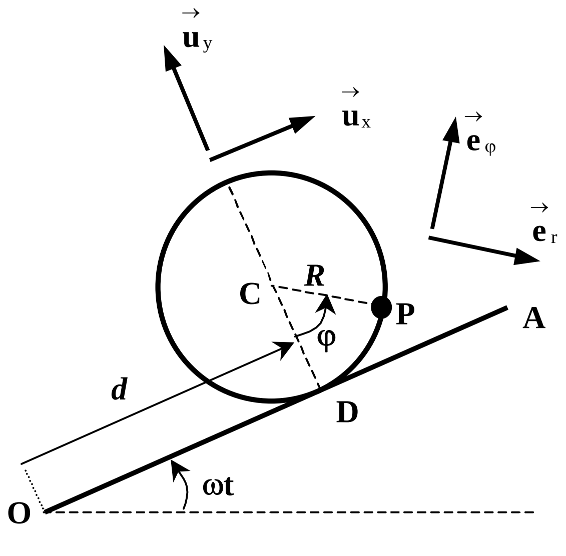

Dar expresiones para la velocidad y la aceleración absoluta del sistema por los siguientes métodos:

a) Escribiendo genéricamente el vector $\vec{r}_P$, posición del punto *P*, considerando *O* como origen de coordenadas y derivándolo directamente.

b) Utilizando el teorema de Roverbal y Coriolis para las expresiones de la velocidad y la aceleración absoluta de una partícula, en función de sus expresiones relativas a sistemas en movimiento, convenientemente elegidos.

## Ejercicio N° 11

La guía *OA* gira alrededor del punto *O* (fijo) con velocidad angular $\omega$ constante. A una distancia *d* de *O*, se halla el punto *D*. Sea C la circunferencia de centro *C* y radio *R* tangente a *OA* en *D*. Sobre C se mueve un punto *P* describiendo un movimiento circular. Sea $\varphi$ el ángulo marcado en la figura. Se toman los versores $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$.



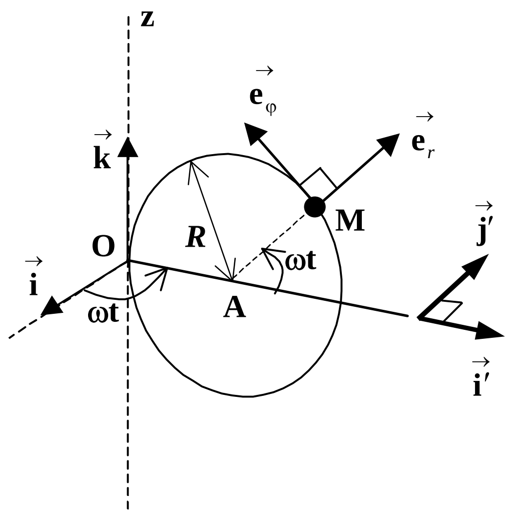

a) Hallar directamente (es decir, a partir de su definición) la derivada respecto del tiempo de los versores anteriores.

b) Hallar la velocidad y aceleración absolutas de *P* escribiendo el vector $\vec{r}_P$, considerando el punto *O* como origen de coordenadas, en un sistema conveniente y derivándolos respecto del tiempo.

c) Verificar el resultado de la parte b) repitiendo el cálculo por otro método.

**Ejercicio Nº 12**

La circunferencia de radio $R$ es tangente a $Oz$ en $O$, y está contenida en un plano que pasa por dicho eje. La misma gira con una velocidad angular $\omega$ constante alrededor de $Oz$. Sobre la circunferencia se mueve un punto $M$, que tiene movimiento relativo a ella uniforme, de velocidad angular $\omega$ idéntica a la anterior. Utilizando los sistemas fijo y móvil indicados en la figura, hallar:




a) Velocidad relativa, de arrastre y absoluta de $M$.

b) Aceleración relativa, de arrastre absoluta de $M$.

NOTA: Se recomienda resolver cada una de las partes de este problema por dos caminos diferentes, como realizado en el ejercicio anterior.

## Parte C: Resultados.

*Ejercicio Nº 1*: $v = \dfrac{x v_B}{\sqrt{x^2 + H^2}}$, $a = \dfrac{H^2 v_B^2}{\sqrt{(x^2 + H^2)^3}}$.

*Ejercicio Nº 2*: a) d = 4.49 km, b)3.93 km.

*Ejercicio Nº 4*: $\vec{v} = v_r \hat{e}_\theta + R\omega \sin(\frac{v_r t}{R})\hat{e}_\phi$

$$\vec{a} = -\left( \frac{v_r^2}{R} + R\omega^2 \sin^2(\frac{v_r t}{R}) \right)\hat{e}_r - R\omega^2 \sin(\frac{v_r t}{R})\cos(\frac{v_r t}{R})\hat{e}_\theta + 2 v_r \omega \cos(\frac{v_r t}{R})\hat{e}_\phi$$

*Ejercicio Nº 6*: a) $\rho(t) = R$, $\varphi = \omega t + \varphi_0$ y $z(t) = v_0 t$

b) La trayectoria es una *hélice*.

c) $s(t) = ct$, $\vec{\mathbf{t}} = \cos\alpha\, \vec{e}_\varphi + \operatorname{sen}\alpha\, \vec{k}$, $\vec{\mathbf{n}} = -\vec{e}_\rho$,

Radio de curvatura: $\dfrac{c^2}{R\omega^2} = \dfrac{R}{(\cos\alpha)^2}$.

*Ejercicio Nº 7*: a) $\vec{v} = (v_0)\vec{i}\,' + (\omega v_0 t)\vec{j}\,'$, $\vec{a} = -(\omega^2 v_0 t)\vec{i}\,' + (2\omega v_0)\vec{j}\,'$.

b) $\vec{v} = (v_0 \cos\omega t - \omega v_0 t \operatorname{sen}\omega t)\vec{i} + (v_0 \operatorname{sen}\omega t + \omega v_0 t \cos\omega t)\vec{j}$,

$$\vec{a} = (-\omega^2 v_0 t \cos\omega t - 2\omega v_0 \operatorname{sen}\omega t)\vec{i} + (-\omega^2 v_0 t \operatorname{sen}\omega t + 2\omega v_0 \cos\omega t)\vec{j}$$

*<u>Ejercicio Nº 8</u>*: b) $\vec{v}_o = (0.9\,m/s)\hat{\imath}$ .

*<u>Ejercicio Nº 9</u>*: a) $\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{K} + \dot{\theta}\vec{\imath}\,'$ con $\vec{\imath}\,'$ según OA.

b) $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{\imath}\,' + \dot{\phi}\, sen\,\theta\vec{j}\,'' + \dot{\phi}\, cos\,\theta\vec{k}\,''$ con $\vec{k}\,''$ según BA.

*<u>Ejercicio Nº 10</u>*: $v_P = l\dot{\phi}\,\hat{j}' + \dot{x}\,\hat{\imath}'' + x(\dot{\phi} + \dot{\theta})\hat{j}''$

$$\vec{a}_P = -l\dot{\phi}^2\hat{\imath}' + l\ddot{\phi}\,\hat{j}' + \left[\ddot{x} - x(\dot{\phi}+\dot{\theta})^2\right]\hat{\imath}'' + \left[x(\ddot{\phi}+\ddot{\theta}) + 2\dot{x}(\dot{\phi}+\dot{\theta})\right]j''$$

Los versores prima son relativos a **OA** y los segunda a **AB**.

*<u>Ejercicio Nº 11</u>*: a) $\dot{\vec{u}}_x = \omega\vec{u}_y$ , $\dot{\vec{u}}_y = -\omega\vec{u}_x$ , $\dot{\vec{e}}_r = (\omega + \dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$ , $\dot{\vec{e}}_\varphi = -(\omega + \dot{\varphi})\vec{e}_r$ .

b) $\vec{v}_P = d\omega\vec{u}_y - r\omega\vec{u}_x + r(\omega + \dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$ ,

$$\vec{a}_P = -d\omega^2\vec{u}_x - r\omega^2 u_y + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - r(\omega + \dot{\varphi})^2\,\vec{e}_r\ .$$

*<u>Ejercicio Nº 12</u>*: a) $\vec{v}_R = R\omega\vec{e}_\varphi$ , $\vec{v}_T = \omega R(1+\cos\omega t)\,\vec{j}\,'$ ,

$$\vec{v} = -(\omega R\,\mathrm{sen}\,\omega t)\vec{\imath}\,' + \omega R(1+\cos\omega t)\,\vec{j}\,' + (\omega R\cos\omega t)\vec{k}\,'\ .$$

b) $\vec{a}_R = -(\omega^2 R)\vec{e}_r$ , $\vec{a}_T = -\omega^2 R(1+\cos\omega t)\vec{\imath}\,'$ , $\vec{a}_C = -(2\omega^2 R\,\mathrm{sen}\,\omega t)\,\vec{j}\,'$ ,

$$\vec{a} = -\omega^2 R(1 + 2\,cos\,\omega t)\vec{\imath}\,' - (2\omega^2 R\,sen\,\omega t)\vec{j}\,' - (\omega^2 R\,sen\,\omega t)\vec{k}\,'$$