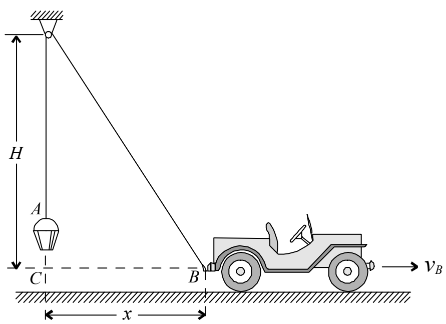
# Mecánica clásica

## Práctico I – Cinemática de la Partícula y Movimiento Relativo

### Parte A: Ejercicios de Cinemática de la Partícula

### Ejercicio 1



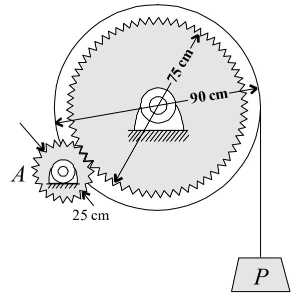

Una cuerda flexible, inextensible y sin peso[1] de longitud $2H$ está unida, en uno de sus extremos (A), a un balde que se mueve verticalmente. Luego de pasar por una roldana, que se encuentra a una altura $H$ del piso, el otro extremo de la cuerda está atado a un jeep que se mueve horizontalmente con velocidad $v_B$ constante. (Ver Figura)

Determinar la velocidad $v$ y la aceleración $a$ del balde en función de la posición del jeep, $x$, que la medimos de forma que cuando $x = 0$ los dos extremos $A$ y $B$ de la cuerda coinciden en la posición $C$.

### Ejercicio 2

En el dispositivo elevador de la figura, el sistema de dientes de los engranajes asegura que el piñón A rueda sin deslizar[2] respecto al piñón $B$. El piñón $A$ alcanza una velocidad de 900 rpm en 10s partiendo del reposo con aceleración constante.

Determinar cuál es la aceleración $a$ del peso $P$.




### Ejercicio 3

Para la cicloide:

$$\begin{cases} x(t) = a\big(\omega t + \operatorname{sen}(\omega t)\big) \\ y(t) = a\big(1 - \cos(\omega t)\big) \end{cases} \qquad -\pi < \omega t \le \pi$$

a) Halle el la longitud de arco $s(t)$ y muestre que si $\theta$ es el ángulo que forma la recta tangente a la cicloide con O$x$, entonces $\operatorname{sen}\theta = ks$, con $k$ una constante.

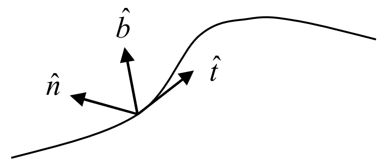
b) Determine los versores tangente, normal y binormal.

---

[1] - Que llamaremos *f.i.s.p.* de aquí en más.

[2] - Se dice que un cuerpo rueda sin deslizar sobre otro cuando son iguales las velocidades de los puntos de ellos que están en contacto.

**Ejercicio 4**




Obtenga las fórmulas de Frenet (derivadas de los versores del triedro de Frenet respecto al parámetro de arco):

a) Ya se sabe que $\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa\,\hat{n}$. Donde $\kappa$ es la curvatura, que se relaciona con el radio de curvatura $\rho$ según $\kappa = \frac{1}{\rho}$.

b) Escribiendo $\frac{d\hat{n}}{ds} = \alpha\,\hat{t} + \beta\,\hat{n} + \gamma\,\hat{b}$, muestre que:

$$\frac{d\hat{n}}{ds} = -\kappa\,\hat{t} + \tau\,\hat{b}$$

$\tau$ es una constante de proporcionalidad que se interpreta en c).

(Sugerencia: desarrolle las derivada de los productos $\frac{d(\hat{n}\bullet\hat{n})}{ds} = 0$ y $\frac{d(\hat{t}\bullet\hat{n})}{ds} = 0$)

c) A partir de $\hat{b} = \hat{t}\wedge\hat{n}$ y a), muestre que:

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\,\hat{n}$$

De aquí se deduce que $|\tau| = \left|\frac{d\hat{b}}{ds}\right|$. A la función $\tau = \tau(s)$ se la llama *torsión* y $\sigma = \frac{1}{\tau}$ se denomina *radio de torsión* (note que tiene dimensiones de longitud).

**Ejercicio 5**

Una partícula *P* está sometida a una aceleración de la forma $\vec{a} = -\omega^2 R\,\hat{e}_\rho$ expresada en coordenadas cilíndricas, siendo $\omega$ y $R$ constantes. En el instante inicial la partícula se encuentra a una distancia *R* del eje Oz y tiene una velocidad de la forma:

$$\vec{v}(0) = R\omega\,\hat{e}_\varphi + v_0\hat{k}$$

a) Halle las leyes horarias del movimiento en coordenadas cilíndricas.

Sugerencia: Observar que la aceleración es de un tipo de movimiento conocido pero que las condiciones iniciales son diferentes, por lo que se recomienda buscar soluciones de distancia al eje Oz constante.

b) Escriba esas ecuaciones en coordenadas cartesianas y decir de qué tipo de trayectoria se trata.

c) Escribirlas ahora en coordenadas intrínsecas, escribiendo también los versores del triedro de Frenet en función de los de la base de coordenadas cilíndricas.

d) Darle interpretación física a las cantidades $c = \sqrt{(R\omega)^2 + (v_0)^2}$ y el ángulo $\alpha$ definido por $\cos\alpha = \frac{R\omega}{c}$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{v_0}{c}$. Estudiar el movimiento discutiendo según sea $R\omega >> v_0$ o $R\omega << v_0$.

### Ejercicio 6

El *vector de Darboux* se define como $\vec{D} = \tau\,\hat{t} + \kappa\,\hat{b}$.

a) Muestre que las fórmulas de Frenet se pueden escribir:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{t}}{ds} = \vec{D} \wedge \hat{t} \\ \dfrac{d\hat{n}}{ds} = \vec{D} \wedge \hat{n} \\ \dfrac{d\hat{b}}{ds} = \vec{D} \wedge \hat{b} \end{cases}$$

b) ¿Cómo se relaciona $\vec{D}$ con el vector velocidad angular del triedro? Describa la rotación instantánea del triedro de Frenet, interpretando las componentes de $\vec{D}$.

## Parte B: Ejercicios de Movimiento Relativo

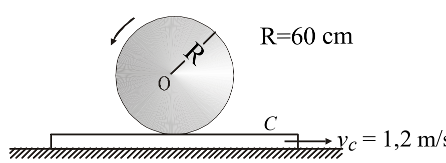
### Ejercicio 7

Un niño se encuentra, en t = 0, en el centro de una calesita que gira con velocidad $\omega$ constante. En ese instante, el niño comienza a moverse a lo largo de un radio dibujado en el piso de la calesita con una velocidad constante $v_0$ relativa a la misma.

a) Hallar la velocidad y aceleración absolutas del niño trabajando en el sistema móvil, es decir expresarlas en los versores del sistema móvil.

b) Idem (a) pero respecto a los versores del sistema absoluto.

### Ejercicio 8




Una rueda, de radio $R$ = 60 cm, está rodando sin deslizar sobre una placa horizontal (ver figura). Ésta a su vez, tiene una velocidad de 1,2 m/s hacia la derecha, y la rueda una velocidad angular de 0,5 rad/s en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

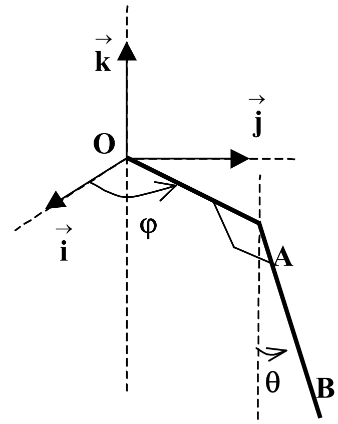
Llamémosle $v_0$ a la velocidad del centro $O$ de la rueda.

a) Sea P el punto en el cual la rueda y la placa están en contacto, escriba las velocidades de:

- El punto de la placa que está en P.
- El punto de la rueda que está en P. Dejarlo expresado en función de $v_0$.

b) Determine la velocidad $v_0$ del centro O de la rueda para que se cumpla la condición de rodadura sin deslizamiento.

**Ejercicio 9**

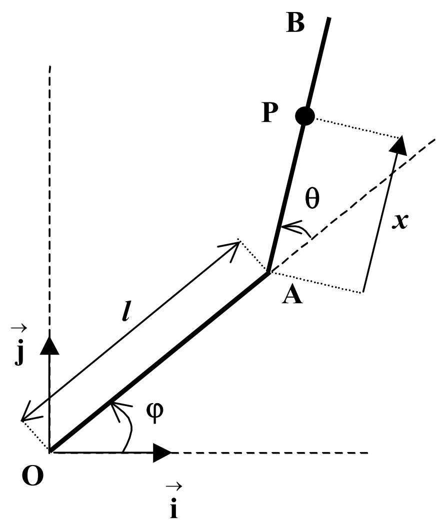



En el sistema de la figura, la barra OA está contenida en el plano $O\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{j}}$ y gira alrededor de $O\vec{\mathbf{k}}$. La barra AB está contenida en un plano perpendicular a OA y gira alrededor de ésta última.

a) Determinar la velocidad angular de la barra AB en función de φ (ángulo entre la barra OA y el eje $O\vec{\mathbf{i}}$) y θ (ángulo entre la barra AB y una paralela al eje $O\vec{\mathbf{k}}$ por el punto A).

b) Expresar dicha velocidad angular en una base solidaria a *AB*.

**Ejercicio 10**




Consideremos la configuración de las barras que se muestra en la Figura. Una barra *OA*, de longitud *l*, gira entorno a uno de sus extremos (*O*), que se encuentra fijo, de manera que siempre está contenida en el mismo plano. El ángulo que forma con el eje $O\vec{i}$ es $\varphi(t)$. La segunda barra *AB* está unida a ella en el punto *A* y gira respecto a este punto. El ángulo entre ella y la *OA* es $\theta(t)$ y ambas barras siempre se encuentran contenidas en el mismo plano. Una partícula *P* se mueve sobre la barra *AB*, siendo $x(t)$ su distancia al punto *A*.

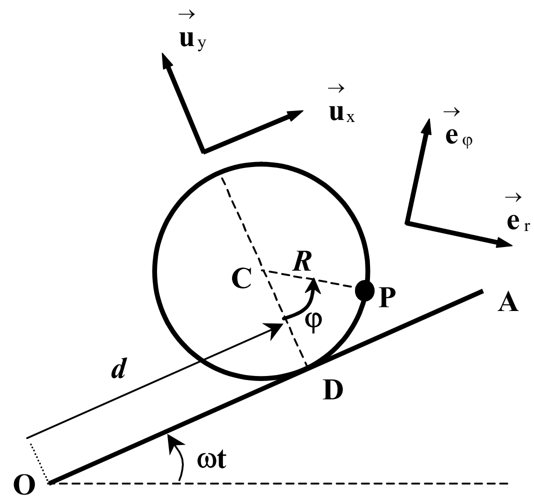
Dar expresiones para la velocidad y la aceleración absoluta del sistema por los siguientes métodos:

a) Escribiendo genéricamente el vector $\vec{r}_P$, posición del punto *P*, considerando *O* como origen de coordenadas y derivándolo directamente.

b) Utilizando el teorema de Roverbal y Coriolis para las expresiones de la velocidad y la aceleración absoluta de una partícula, en función de sus expresiones relativas a sistemas en movimiento, convenientemente elegidos.

## Ejercicio 11

La guía *OA* gira alrededor del punto *O* (fijo) con velocidad angular $\omega$ constante. A una distancia *d* de *O*, se halla el punto *D*. Sea C la circunferencia de centro *C* y radio *R* tangente a *OA* en *D*. Sobre C se mueve un punto *P* describiendo un movimiento circular. Sea $\varphi$ el ángulo marcado en la figura. Se toman los versores $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$.



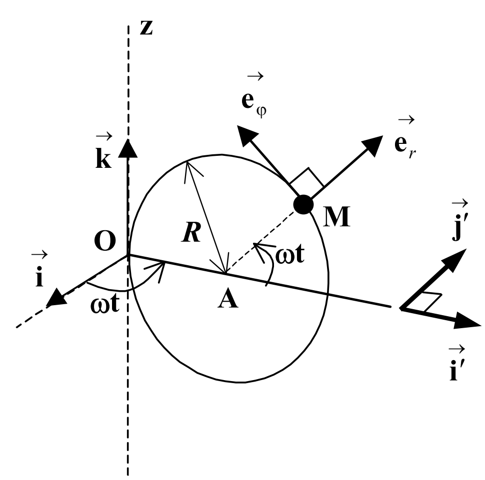

a) Hallar directamente (es decir, a partir de su definición) la derivada respecto del tiempo de los versores anteriores.

b) Hallar la velocidad y aceleración absolutas de *P* escribiendo el vector $\vec{r}_P$, considerando el punto *O* como origen de coordenadas, en un sistema conveniente y derivándolos respecto del tiempo.

c) Verificar el resultado de la parte b) repitiendo el cálculo por otro método.

## Ejercicio 12

La circunferencia de radio *R* es tangente a *Oz* en *O*, y está contenida en un plano que pasa por dicho eje. La misma gira con una velocidad angular $\omega$ constante alrededor de *Oz*. Sobre la circunferencia se mueve un punto *M*, que tiene movimiento relativo a ella uniforme, de velocidad angular $\omega$ idéntica a la anterior. Utilizando los sistemas fijo y móvil indicados en la figura, hallar:




a) Velocidad relativa, de arrastre y absoluta de *M*.

b) Aceleración relativa, de arrastre absoluta de *M*.

Nota: Se recomienda resolver cada una de las partes de este problema por dos caminos diferentes, como realizado en el ejercicio anterior.

## Resultados

**Ejercicio 1** $v=\dfrac{xv_B}{\sqrt{x^2+H^2}}$ ; $a=\dfrac{H^2v_B^2}{\sqrt{(x^2+H^2)^3}}$

**Ejercicio 2** $a=0.45\,\pi\,m/s^2$

**Ejercicio 3** **a)** $s(t)=4a\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)$

**b)** $\hat{t}=\cos\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)\hat{i}+\mathrm{sen}\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)\hat{j}$; $\hat{n}=-\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)\hat{i}+\cos\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)\hat{j}$; $\hat{b}=\hat{k}$

**Ejercicio 5** **a)** $\rho(t)=R;\quad \varphi=\omega t+\varphi_0;\quad z(t)=v_0 t$

**b)** La trayectoria es una *hélice*.

**c)** $s(t)=ct$ ; $\hat{t}=\cos\alpha\,\hat{e}_\phi+\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{k}$ ; $\hat{n}=-\hat{e}_\rho$

Radio de curvatura: $\dfrac{c^2}{R\omega^2}=\dfrac{R}{(cos\,\alpha)^2}$

**Ejercicio 6** **b)** $\vec{\omega}=\dot{s}\vec{D}$

**Ejercicio 7** **a)** $\vec{v}=(v_0)\vec{i}\,'+(\omega v_0 t)\vec{j}\,'$, $\vec{a}=-(\omega^2 v_0 t)\vec{i}\,'+(2\omega v_0)\vec{j}\,'$.

**b)** $\vec{v}=(v_0\cos\omega t-\omega v_0 t\,\mathrm{sen}\,\omega t)\vec{i}+(v_0\,\mathrm{sen}\,\omega t+\omega v_0 t\cos\omega t)\vec{j}$

$\vec{a}=(-\omega^2 v_0 t\cos\omega t-2\omega v_0\,\mathrm{sen}\,\omega t)\vec{i}+(-\omega^2 v_0 t\,\mathrm{sen}\,\omega t+2\omega v_0\cos\omega t)\vec{j}$

**Ejercicio 8** **b)** $\vec{v}_o=(0.9\,m/s)\hat{i}$

**Ejercicio 9** **a)** $\vec{\omega}=\dot{\varphi}\vec{K}+\dot{\theta}\vec{i}\,'$ con $\vec{i}\,'$ según OA

**b)** $\vec{\omega}=\dot{\theta}\vec{i}\,'+\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j}\,''+\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{k}\,''$ con $\vec{k}\,''$ según BA

**Ejercicio 10** $v_P=l\dot{\phi}\,\hat{j}'+\dot{x}\,\hat{i}''+x(\dot{\phi}+\dot{\theta})\hat{j}''$

$\vec{a}_P=-l\dot{\phi}^2\hat{i}'+l\ddot{\phi}\,\hat{j}'+\left[\ddot{x}-x(\dot{\phi}+\dot{\theta})^2\right]\hat{i}''+\left[x(\ddot{\phi}+\ddot{\theta})+2\dot{x}(\dot{\phi}+\dot{\theta})\right]\hat{j}''$

Los versores prima son relativos a **OA** y los segunda a **AB**.

**Ejercicio 11** **a)** $\dot{\vec{u}}_x=\omega\vec{u}_y$; $\dot{\vec{u}}_y=-\omega\vec{u}_x$; $\dot{\vec{e}}_r=(\omega+\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$; $\dot{\vec{e}}_\varphi=-(\omega+\dot{\varphi})\vec{e}_r$

**b)** $\vec{v}_P=d\omega\vec{u}_y-r\omega\vec{u}_x+r(\omega+\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$

$\vec{a}_P=-d\omega^2\vec{u}_x-r\omega^2 u_y+r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi-r(\omega+\dot{\varphi})^2\vec{e}_r$

**Ejercicio12** **a)** $\vec{v}_R=R\omega\vec{e}_\varphi$

$\vec{v}_T=\omega R(1+\cos\omega t)\vec{j}\,'$

$\vec{v}=-(\omega R\,\mathrm{sen}\,\omega t)\vec{i}\,'+\omega R(1+\cos\omega t)\vec{j}\,'+(\omega R\cos\omega t)\vec{k}\,'$

**b)** $\vec{a}_R=-(\omega^2 R)\vec{e}_r$; $\vec{a}_T=-\omega^2 R(1+\cos\omega t)\vec{i}\,'$

$\vec{a}_C=-(2\omega^2 R\,\mathrm{sen}\,\omega t)\vec{j}\,'$

$\vec{a}=-\omega^2 R(1+2\cos\omega t)\vec{i}\,'-(2\omega^2 R\,\mathrm{sen}\,\omega t)\vec{j}\,'-(\omega^2 R\,\mathrm{sen}\,\omega t)\vec{k}\,'$