Mecánica clásica

Práctico II – Dinámica de la partícula y Sistemas no inerciales

Parte A: Ejercicios de Dinámica de la Partícula

Ejercicio 1

Una partícula de masa m se desplaza por un tubo que contiene un fluido viscoso. Dicho fluido ejerce sobre la partícula una fuerza $\vec{F} = -b\vec{v}$, con $b > 0$. En cierto instante se mide que la partícula tiene una velocidad v_0.

a) Encuentre la expresión de la velocidad y la posición en función del tiempo tomando como origen de tiempo el instante de medición y como origen de coordenadas el lugar de medición.

b) ¿Cómo sería $v(t)$ para el caso de una fuerza de la forma $\vec{F} = -bv^n\,\hat{\mathrm{v}}$? ¿Qué conclusiones pueden sacarse, dependiendo del valor de n?

Ejercicio 2

Una bala de masa m es disparada hacia arriba con una velocidad inicial v_0, vertical. Asumiendo que la misma está sometida a su peso y a una fuerza viscosa del tipo: $\vec{\mathbf{F}} = -b\,v\,\vec{\mathbf{v}}$ (o sea, una fuerza viscosa que depende del cuadrado de la velocidad $F = -bv^2$, opuesta a la velocidad):

a) Plantee la ecuación del movimiento e intégrela para hallar:

1) El tiempo que demora en detenerse.

2) La altura máxima a la que llega.

Nota: Ambas cantidades pueden hallarse en forma completamente independiente integrando en forma diferente la ecuación de movimiento.

b) ¿Cuál es la velocidad con la que vuelve a golpear el piso?

Ejercicio 3

Un proyectil es disparado con velocidad inicial $\vec{\mathrm{v}} = v_0(\cos\alpha\,\hat{\mathrm{i}} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{\mathrm{j}})$ desde el origen de coordenadas. Suponiendo que la resistencia del aire es de la forma $\vec{F}_R = -\beta\,\vec{\mathrm{v}}$:

a) Determine la velocidad $\vec{\mathrm{v}}(t)$ y la posición $\vec{\mathrm{r}}(t)$ del proyectil para todo instante posterior. (Nota: La ecuación de movimiento puede ser integrada vectorialmente en este caso).

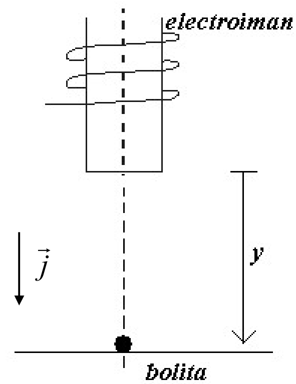
b) Muestre que para tiempos muy grandes el movimiento es vertical descendente.

c) Halle la función $y = y(x)$ y muestre que para β pequeño se obtiene la parábola conocida más un término en x^3. (Nota: Recuerde que $\ln(1+u) \approx u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3}$ para u pequeño).

Ejercicio 4

Sobre una mesa horizontal descansa una pequeña bolita de radio s y de masa m. A una distancia D por encima de la mesa hay un electroimán, que al conectarse en un determinado instante levanta a la bolita de la mesa y la hace chocar con la cara del electroimán.

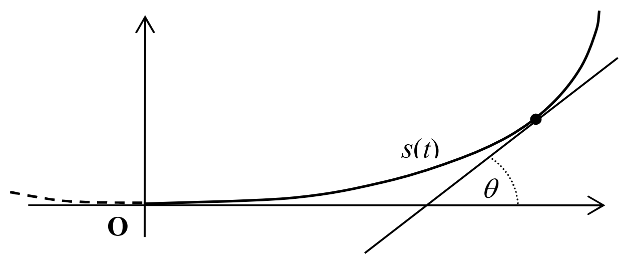
El polo opuesto del electroimán se halla a considerable distancia de la bolita, por lo que supondremos que la fuerza atractiva es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre la cara del electroimán y el centro de la bolita y vale $\vec{F} = -\frac{k}{y^2}\hat{\jmath}$, siendo k una constante positiva e y la coordenada del centro de la bolita.



¿Cuál es la velocidad de la bolita en el momento en que choca con el electroimán?

Ejercicio 5

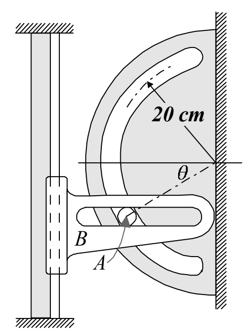
Un objeto pequeño se mueve, con una velocidad inicial v_0, sobre una guía fija y lisa, contenida en un plano vertical. La guía es una cicloide, en la cual el ángulo que forma la tangente a la curva con la horizontal varía siguiendo la ley $\operatorname{sen}\theta = k\,s$, donde k es una constante y s es la distancia medida a lo largo de la pendiente, a partir de su parte inferior.



Halle la máxima distancia s_m que alcanza el objeto hacia arriba de la curva y el tiempo que demora en detenerse.

Ejercicio 6

El movimiento del pasador A de 100g en la ranura circular está regido por la guía B que tiene una velocidad constante hacia arriba de 1,2 m/s durante una parte de su movimiento. Calcule la fuerza N ejercida por la guía B sobre el pasador cuando éste pasa por la posición para la cual θ = 30º. Todas las superficies están exentas de rozamiento.

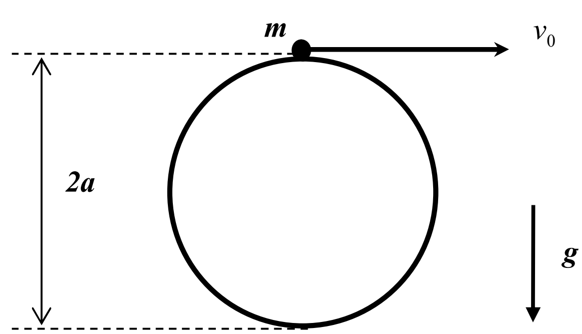


Ejercicio 7

En el exterior de una guía vertical circular lisa de radio a, se mueve, apoyado sobre ella, un punto material P de masa m, que en un cierto instante se encuentra en el punto superior con velocidad v_0 (tangente a la guía).

a) Halle la ecuación de movimiento aplicando la ley de Newton.

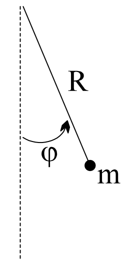
b) Integrando la ecuación anterior, halle la velocidad en función de la posición.



c) Analice físicamente el resultado discutiendo qué sucede para diferentes valores de v_0.

Ejercicio 8

Una partícula de masa m está unida a un hilo de longitud R cuyo otro extremo está atado a un punto fijo. Uno de los movimientos posibles de la partícula, llamado péndulo simple, es cuando la partícula permanece en un plano vertical, sometida solamente a su peso y a la tensión del hilo, moviéndose sobre una circunferencia.



a) Halle la ecuación de movimiento de un péndulo simple.

b) Suponiendo que el péndulo se lanza con velocidad v_0 tangente a la circunferencia desde el punto inferior de la misma ($\varphi = 0$), integre una vez la ecuación del movimiento, hallando la velocidad angular en función de la posición.

c)

1) Suponiendo que el vínculo es bilateral (en lugar de un hilo, la unión de la partícula con el punto fijo es a través de una barra rígida, de masa despreciable) demuestre que si $v_0 \leq 2\sqrt{gR}$ la partícula se detiene cuando alcanza un cierto ángulo $\varphi = \varphi_0$ y, eventualmente, retrocederá.

2) En caso de que no se cumpla la condición anterior observe que tendremos un movimiento giratorio. ¿Por qué?

3) Si $v_0 = 2\sqrt{gR}$, ¿cuál es el ángulo φ_0 y cuánto demora la partícula en llegar allí?

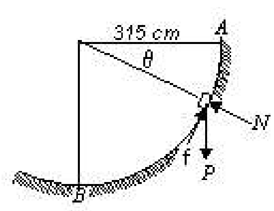
d) Halle la tensión de la barra.

e) Supongamos ahora que la partícula se encuentra unida al punto fijo por medio de un hilo, que supondremos flexible, inextensible y sin masa. Estudiando el signo de la tensión vea que, como el hilo sólo puede ejercer tensión en un sentido, puede existir un cierto ángulo de desprendimiento φ_{des}, en el cual la partícula deja de moverse en una circunferencia. Halle dicho ángulo.

f) Estudiando cómo varían φ_0 y φ_{des} con la velocidad v_0 discuta los diferentes tipos de movimiento posibles. Para eso considere que el vínculo es unilateral, es decir, que puede haber desprendimiento.

Ejercicio 9

Se suelta un objeto pequeño desde A partiendo del reposo y desliza con rozamiento, por el camino circular hacia abajo. Si el coeficiente de rozamiento es f = 1/5, determinar la velocidad del objeto al pasar por B.

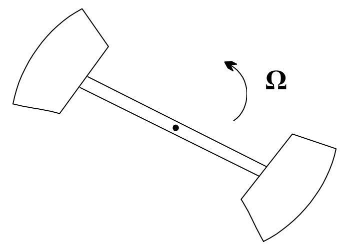


Sugerencia: Halle la ecuación de movimiento en función de θ y resuélvala haciendo el cambio de variable: $\dot{\theta}^2 = u(\theta)$.

Parte B: Ejercicios de Sistemas No Inerciales

Ejercicio 10

Una estación espacial posee dos compartimentos, como indica la figura correspondiente. La estación gira a B revoluciones por minuto, de modo que en los compartimientos se experimente una "gravedad" ficticia.



a) Calcule $\mathbf{\Omega}$ para que en cada compartimiento su habitante trabaje en un ambiente con *gravedad*.

b) Una manzana se deja ahora caer desde el techo del compartimiento. ¿Qué fuerzas (incluyendo las ficticias) actúan sobre la manzana mientras esta cae?

c) Explique *cualitativamente* por qué la manzana *cae* al *suelo* desde el punto de vista de un sistema de referencia inercial en el cual no hay fuerzas que actúan sobre la manzana.

Ejercicio 11

Una partícula P de masa m y carga q se mueve bajo la acción de una fuerza $\vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{r}})$ y un campo magnético $\vec{B}=B\,\hat{\mathrm{k}}$, por lo que la ecuación del movimiento es:

$$m\frac{d\,\vec{\mathrm{v}}}{dt}=\vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{r}})+qB\,\vec{\mathrm{v}}\times\hat{\mathrm{k}}$$

a) Muestre que el segundo término desparece en un sistema no inercial rotando con respecto al sistema inercial original con velocidad angular $\vec{\omega}=\Omega\,\hat{\mathrm{k}}$, para un cierto valor de Ω.

b) Si $\vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{r}})=-C\,\vec{\mathrm{r}}$ (C es una constante) pruebe que en el sistema no inercial hay soluciones correspondientes a órbitas circulares (las cuales también son órbitas circulares en el sistema inercial). Muestre que en el sistema inercial estas órbitas tienen dos frecuencias distintas y determine estas frecuencias.

Ejercicio 12

Del techo de un vagón, que se mueve con una aceleración a, cuelga por medio de un resorte (de constante k y longitud natural l_0) un objeto de masa m.

a) Calcule el ángulo que forma el resorte con la vertical.

b) Calcule el estiramiento del resorte.

Ejercicio 13

Un bloque pequeño, de peso P, se coloca sobre la superficie horizontal de un disco circular, a una distancia radial r del eje de giro. Si f es el coeficiente de rozamiento estático y el disco parte del reposo con aceleración angular α constante:

a) Halle la velocidad angular ω a la cual empieza a deslizar el bloque.

b) ¿Bajo qué condiciones deslizará desde el comienzo?

Ejercicio 14

Un tubo de radio R, gira alrededor de su centro con una velocidad angular ω constante, de forma que siempre se mantiene contenido en un plano horizontal. Dentro del tubo está colocada una esfera de radio R (igual radio que el tubo), que desliza por él sin rozamiento, y que por lo tanto llena completamente el interior del tubo.

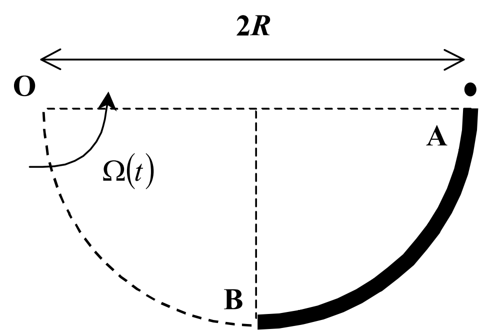
a) Halle la ley horaria de la esfera, si en el instante inicial ésta se encuentra en el centro de rotación y tiene una velocidad inicial v_0 (a lo largo del tubo).

b) Halle la fuerza normal.

c) Si el tubo tiene una longitud de $2l$ ¿cuál será la velocidad de la bola en el instante que sale del tubo (mirado desde un sistema inercial solidario al centro de rotación)?

d) Se desea evitar que la esfera se escape del tubo, por lo que se agrega un resorte de constante k y longitud natural nula, que tiene un extremo unido a la bola y el otro atado al centro del tubo. Halle las condiciones que deben verificar los parámetros del problema para que la bola no alcance el extremo del tubo.

Ejercicio 15



Un tubo liso AB, en forma de cuadrante de circunferencia de diámetro $OA = 2R$ gira con velocidad angular variable $\Omega(t)$ en un plano alrededor de O. En el instante inicial, el extremo A del tubo captura una partícula que se hallaba en reposo. Considerando que no actúa el peso en este problema:

a) Determine $\Omega(t)$ en función de $\Omega(0)$ de modo que la velocidad relativa de la partícula en el tubo sea de módulo constante.

b) Halle la normal $\vec{N}(t)$ que actúa sobre la partícula.

Resultados

Ejercicio 1 **a)** $v(t)=v_0 e^{-bt/m}$, $x(t)=\dfrac{mv_0}{b}(1-e^{-bt/m})$ **b)** $v(t)=\left[v_0^{1-n}-(1-n)\dfrac{b}{m}t\right]^{\frac{1}{1-n}}$

Ejercicio 2 **a) 1)** $t=\displaystyle\int_0^{v_0}\frac{m\,d\dot{y}}{mg+b\dot{y}^2}=\sqrt{\frac{m}{bg}}\,\mathrm{Arctg}\left(\sqrt{\frac{bv_0^2}{mg}}\right)$ **2)** $h=\dfrac{m}{2b}\ln\left(\dfrac{mg+bv_0^2}{mg}\right)$

b) $v_f=\sqrt{\dfrac{mgv_0^2}{mg+bv_0^2}}$.

Ejercicio 3 **a)** $\vec{\mathrm{v}}(t)=-g\dfrac{m}{\beta}\left(1-e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)\hat{\mathrm{j}}+\vec{\mathrm{v}}_0\,e^{-\frac{\beta}{m}t}$

$$\vec{\mathrm{r}}(t)=\frac{m}{\beta}v_0\cos\alpha\left(1-e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)\hat{\mathrm{i}}+\left[-g\frac{m}{\beta}t+\frac{m}{\beta}\left(v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha+\frac{mg}{\beta}\right)\left(1-e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)\right]\hat{\mathrm{j}}$$

b) $y(x)\approx-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha-\dfrac{1}{3}\dfrac{\beta}{m}g\left(\dfrac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^3$

Ejercicio 4 $v=\sqrt{2(D-2s)\left(\dfrac{k}{ms(D-s)}-g\right)}$

Ejercicio 5 $s_m=\dfrac{v_0}{\sqrt{gk}}$, $\Delta t=\dfrac{\pi}{2\sqrt{gk}}$

Ejercicio 6 $N=mg-\dfrac{mv_B^2\,\mathrm{sen}\,\theta}{R\cos^4\theta}=0.34\,N$.

Ejercicio 7 **a)** $N-mg\cos\theta=-mR\dot{\theta}^2$ (dirección radial),

$mg\,\mathrm{sen}\,\theta=mR\ddot{\theta}$ (dirección tangencial).

b) $v=\sqrt{v_0^2+2gR(1-\cos\theta)}$.

c) Si $v_0\le\sqrt{gR}$ se desprende para un ángulo $\theta=\mathrm{Arccos}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{v_0^2}{gR}+2\right)$.

(Si se cumple que $v_0\approx 0$ entonces $\theta\approx 48.2^\circ$).

Si $v_0>\sqrt{gR}$ entonces se desprende inicialmente ($\theta=0$).

Ejercicio 8 **a)** $\ddot{\varphi}+\dfrac{g}{R}\,\mathrm{sen}\,\varphi=0$

b) $\dot{\varphi}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - 2\frac{g}{R}(1-\cos\varphi)$

c) 1) $\varphi_0 = \mathrm{Arccos}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gR}\right)$ **2)** Porque la velocidad no se anula y entonces no puede cambiar de signo. **3)** $\varphi_0 = \pi$ y el tiempo es infinito.

e) $T = mg(3\cos\varphi - 2) + m\frac{v_0^2}{R}$, $\varphi_{des} = \mathrm{Arccos}\frac{1}{3}\left(2 - \frac{v_0^2}{gR}\right)$

f) i) Si $v_0 < \sqrt{2gR} \Rightarrow |\varphi| < \varphi_0 < \pi/2$ movimiento oscilatorio, no hay desprendimiento.

ii) $\sqrt{2gR} < v_0 < \sqrt{5gR} \Rightarrow \pi/2 < \varphi_{des} < \pi$, se desprende.

(Si $\sqrt{2gR} < v_0 < 2\sqrt{gR} \Rightarrow \varphi_{des} < \varphi_0$)

(Si $2\sqrt{gR} < v_0 < \sqrt{5gR} \Rightarrow \text{no existe } \varphi_0$)

iii) $v_0 > \sqrt{5gR}$ la partícula da vueltas completas.

Ejercicio 9

$$u(\theta) = \frac{2g}{R(1+4f^2)}\left[(1-2f^2)\operatorname{sen}\theta + 3f\cos\theta - 3fe^{-2f\theta}\right]$$

$$v_B = \sqrt{\frac{gR}{29}\left(46 - 30e^{-\pi/5}\right)} = 5.65m/s$$

Ejercicio 10 **a)** $\Omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$.

b) Fuerzas centrífuga y de Coriolis.

Ejercicio 11 **a)** $\Omega = -\frac{qB}{2m}$, **b)** $\omega = \Omega \pm \sqrt{-\Omega^2 + \frac{C}{m}}$.

Ejercicio 12 **a)** $\mathrm{Arctg}\frac{\alpha}{g}$ **b)** $\frac{m}{k}\sqrt{\alpha^2 + g^2}$.

Ejercicio 13 $\omega = \sqrt[4]{\frac{f^2 g^2}{r^2} - \alpha^2}$, si $\alpha \geq \frac{fg}{r}$ deslizará desde el comienzo.

Ejercicio 14 **a)** $r(t) = \frac{v_0}{\omega}\operatorname{senh}(\omega t)$ **b)** $\vec{N}(t) = 2mv_0\omega\cosh(\omega t)\hat{e}_\varphi + mg\hat{\mathrm{k}}$.

c) $\vec{v}_f = \sqrt{v_0^2 + l^2\omega^2}\,\hat{e}_r + l\omega\,\hat{e}_\varphi$.

Ejercicio 15 **a)** $\Omega(t) = \dfrac{2\Omega(0)}{2 + \ln\left(\dfrac{1+\cos(2\Omega(0)t)}{2}\right)}$

b) $N(t) = 2mR\left(2\Omega(0)\Omega(t) - \Omega^2(t) - 2\Omega^2(0)\right)$