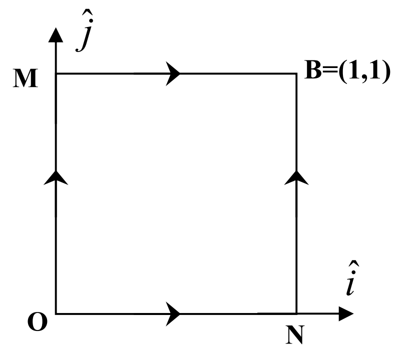
Mecánica clásica

Práctico III – Trabajo y Energía

Ejercicio 1

Una partícula está sometida a una fuerza:

$$\vec{F} = K\left(y^2 - x^2\right)\hat{\imath} + 3Kxy\,\hat{\jmath}$$



a) Calcule el trabajo hecho por la fuerza al llevar la partícula de *O* hasta *B*:

i) Por los caminos (*OM*+*MB*) y (*ON*+*NB*).

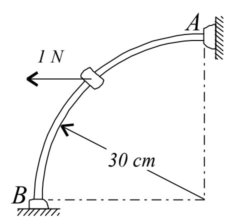
ii) Por la diagonal del rectángulo ONBM (recta *OB*).

iii) Por la parábola $y = x^2$.

b) Repita los cálculos si la fuerza es $\vec{F} = 2Kxy\,\hat{\imath} + Kx^2\,\hat{\jmath}$ ¿Qué puede decir acerca de las dos fuerzas? ¿Por cuál de los caminos llevaría Ud. al móvil sometido a esas fuerzas, si desease que al menos en términos "energéticos" le costase poco?

c) Investigue si las fuerzas anteriores derivan de un potencial, y en caso de que sea así, hállelo.

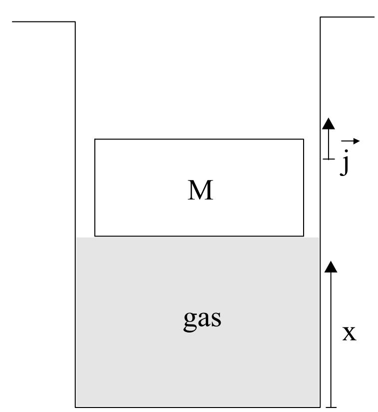
Ejercicio 2



Una cuenta de 50*g* parte del reposo en *A* y desliza sin rozamiento en un plano vertical a lo largo del alambre fijo bajo la acción de una fuerza horizontal constante de 1 N. Halle la velocidad *v* de la cuenta cuando choca contra el extremo *B*.

Ejercicio 3

La fuerza que ejerce un gas comprimido dentro de un tubo sobre la masa *M* que lo comprime (ver figura) vale: $\vec{F}_{GAS} = \frac{k}{x}\,\hat{\jmath}$, donde $\hat{\jmath}$ indica la dirección vertical ascendente.



a) Hallar un potencial *U(x)* para la fuerza $\vec{F}_{GAS}$.

b) Hallar la ecuación del movimiento de M:

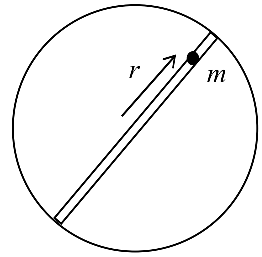
i) aplicando la segunda ley de Newton.

ii) derivando la ecuación de la energía: $T+U = E$.

c) Hallar las posiciones de equilibrio de la masa. Indicar si son estables o no.

d) Si el tubo tiene longitud *l*, se comprime el gas hasta la mitad del mismo y en determinado momento se suelta la masa (en reposo). ¿Con qué velocidad llega *M* al borde del tubo? ¿Qué condición se debe verificar para que efectivamente llegue arriba?

Ejercicio 4



Suponga que se cava un túnel a través de la tierra pasando por el centro. Desde uno de los extremos de este túnel se deja caer una partícula de masa m, con velocidad inicial nula. Se supone que la densidad de la tierra es uniforme y que la masa terrestre retirada al cavar el túnel es despreciable.

La fuerza gravitatoria cumple la ley de Gauss, entonces dentro de una esfera maciza la fuerza sobre una masa puntual m a distancia r del centro es:

$$F = \frac{GM(r)m}{r^2}$$

Donde $M(r)$ es la masa contenida dentro una esfera de radio r concéntrica con la esfera maciza. Calcule la velocidad de la partícula cuando pasa por el centro de la Tierra en función de g y R_T.

Ejercicio 5

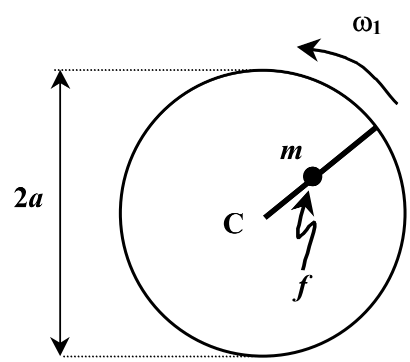
Una partícula P de masa $m = 1$ se mueve sobe el eje x *positivo* bajo la acción de una fuerza:

$$F(x) = \frac{36}{x^3} - \frac{9}{x^2} \qquad (x > 0)$$

a) Muestre que los movimientos posibles de P son: i) una oscilación periódica entre dos puntos extremos o ii) un movimiento no acotado con un punto extremo, dependiendo del valor de la energía total.

b) Si P es lanzada desde $x = 4$ con velocidad $v = 0.5$, verifique que el movimiento es periódico y determine el período. (Nota: Puede ser necesaria la integral: $\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx = \frac{\pi(a+b)}{2}$)

Ejercicio 6

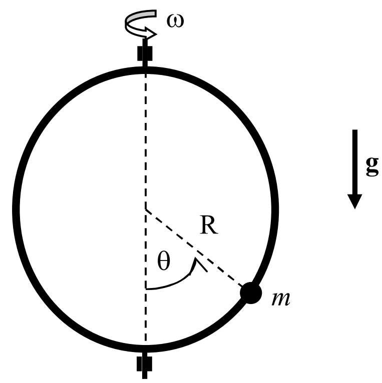


Un disco de radio a gira con velocidad angular ω_1 constante en torno a su centro **C** que se encuentra fijo. Solidaria al disco hay una guía radial rugosa sobre la que se mueve una partícula de masa m. El coeficiente de rozamiento entre la partícula y la guía es f. No hay peso en este problema.

La partícula se encuentra inicialmente en reposo respecto a la guía, a una distancia b del centro del disco.

a) Halle la ecuación de movimiento.
b) Halle la ley horaria.
c) Calcule el trabajo realizado por la reacción normal de la guía sobre la partícula, desde el instante inicial hasta que la misma alcanza el borde del disco.

d) Usando el teorema de variación de la energía, deduzca cuál es la energía disipada por la fuerza de fricción, dejándola expresada en función de la velocidad radial final.

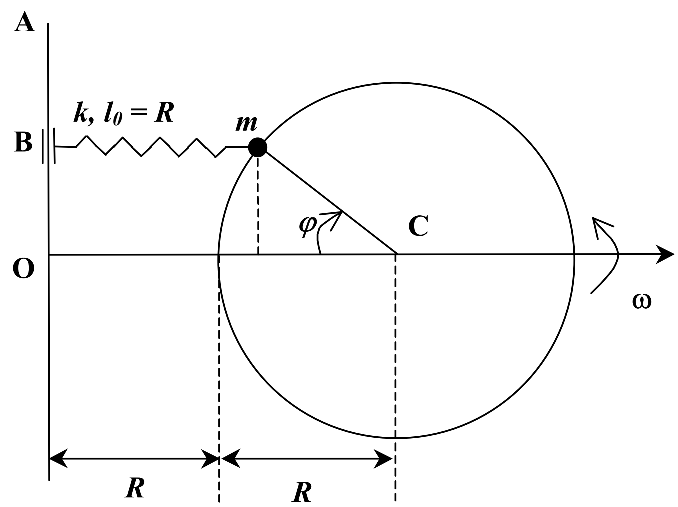


Ejercicio 7

Una guía circular lisa sin masa de radio *R* gira con velocidad angular ω constante respecto a un eje vertical que coincide con uno de sus diámetros. Una partícula de masa *m* está obligada a moverse sobre la guía (vínculo bilateral).

Halle las posiciones de equilibrio y su estabilidad, discutiendo según los parámetros del sistema.

Ejercicio 8



Una partícula de masa *m* se mueve sobre una guía circular *lisa* de radio *R*, y centro C. La partícula está unida a un resorte de constante *k* y longitud natural *R*. El otro extremo del resorte, B, está unido a otra guía rectilínea OA, que dista 2*R* de C (es decir OA $\perp$ OC = 2*R*) y que se encuentra en el mismo plano de la guía circular. La unión entre este extremo B del resorte y la guía OA es tal que el resorte permanece paralelo a OC en todo instante.

Todo el sistema gira con respecto al eje OC con velocidad angular ω constante respecto a un sistema fijo.

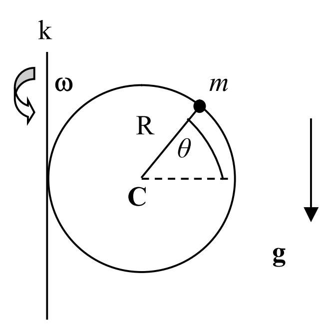
Consideramos que no actúa el peso.

a) Halle la ecuación de movimiento relativo de la masa *m*.

b) Halle las posiciones de equilibrio relativo de la masa *m*.

c) Especifique cuáles posiciones de equilibrio son estables y cuáles inestables.

Ejercicio 9



Una guía lisa, de radio R, está contenida en un plano vertical y gira con velocidad angular **ω** constante en torno al eje vertical Ok. La guía es tangente al eje Ok en el punto O, según se indica en la figura. Una partícula de masa *m* está obligada a moverse sobre la guía, a través de un vínculo bilateral. El ángulo θ mide la posición relativa entre la partícula y la guía.

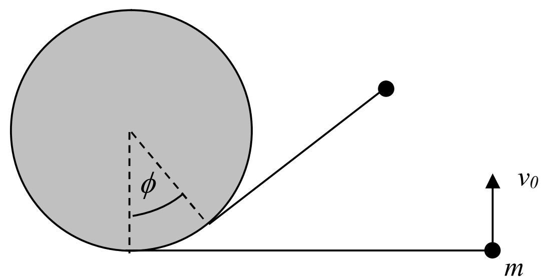
a) Halle la ecuación de movimiento para *m*.

b) Escriba la ecuación que determina las posiciones de equilibrio relativo de *m* respecto a la guía.

c) Determine el valor de la reacción normal que ejerce la guía sobre *m* para las posiciones de equilibrio.

Ejercicio 10

Un cilindro vertical de radio *a* está fijo en su base a una mesa horizontal lisa. Se enrolla una cuerda *fisp* en el cilindro en cuyo extremo libre se ata una partícula de masa *m*. Inicialmente el tramo de cuerda sin enrollar es $4a/3$ y se le da a *m* una velocidad perpendicular a la cuerda, de forma que ésta comienza a enrollarse en el cilindro.



a) Halle la velocidad y la aceleración de *m*.

b) Muestre que la energía se conserva en este problema.

c) Halle el tiempo t_1 que demora *m* en golpear al cilindro.

Ejercicio 11

Dentro de una nave espacial, que se encuentra lejos de cualquier campo gravitatorio, se realiza el siguiente experimento:

Se lanza una bala por una guía *AB* a 45º con la trayectoria de la nave. Se observa que la posición x(t) de la bala es: $x(t)=Ct^2$.

Si la nave avanza con velocidad v_0 constante alejándose de la tierra:

a) Hallar la energía cinética *T* de la bala para un observador dentro de la nave y un observador parado en la tierra.

b) Hallar la potencia neta *P(t)* que se ejerce sobre la bala para cada uno de los observadores.

c) ¿Son las cantidades medidas en uno y otro sistema iguales? ¿Deberían serlo? Dado que ambos sistemas son inerciales, ¿a qué se deben las diferencias que puedan aparecer entre uno y otro?

Nota: Una forma de intentar responderla es observar a qué es igual la diferencia entre la potencia "relativa" y la "absoluta".

Resultados

Ejercicio 1 **a)** ***i***) OM + MB: W = 2K/3. ***ii***) W = K ***iii***) W = 16K/15

ON + NB: W = 7K/6.

b) ***i***) OM + MB: W = K ***ii***) W = K ***iii***) W = K

ON + NB: W = K

Ejercicio 2 $v=\sqrt{\dfrac{2FR}{m}+2gR}\;=4.23\,m/s$

Ejercicio 3 **a)** $-k\ln x$ **b)** $\ddot{x}=\dfrac{k}{Mx}-g$ **c)** $x_{eq}=\dfrac{k}{Mg}$ Estable

d) $\mathrm{v_f}=\sqrt{\dfrac{2k}{M}\ln 2-gl}$ Condición: $2k\ln 2\geq Mgl$

Ejercicio 4 $v=\sqrt{gR_T}=7857.5\,m/s$

Ejercicio 6 **a)** $\ddot{r}+2f\omega_1\dot{r}-\omega_1^2 r=0$

b) $r(t)=Ae^{\alpha_1 t}+Be^{\alpha_2 t}$ $\quad \alpha_1=\omega_1(-f+\sqrt{f^2+1})$, $\alpha_2=\omega_1(-f-\sqrt{f^2+1})$ $\quad A=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}b=-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}B$

c) $W_N=m\omega_1^2(a^2-b^2)$

d) $W_{Roz}=\dfrac{1}{2}m\dot{r}_F^2-\dfrac{1}{2}m(a^2-b^2)$

Ejercicio 7 $\theta=0,\pi$ Inestables si: $g<\omega^2R$, Estables si: $g>\omega^2R$.

$\theta_1=\pm\,\mathrm{Arc}\cos\left(\dfrac{g}{\omega^2R}\right)$ Estables si: $g<\omega^2R$, Inestables si: $g>\omega^2R$.

Ejercicio 8 **a)** $\ddot{\phi}-\left(\dfrac{k}{m}+\omega^2\right)\operatorname{sen}\phi\cos\phi+\dfrac{k}{m}\operatorname{sen}\phi=0$

b), c) $\phi=0$ y $\phi=\pi$ Inestables.

$\phi=\pm\,\mathrm{Arc}\cos\left(\dfrac{k}{k+m\omega^2}\right)$ Estables.

Ejercicio 9 **a)** $\ddot{\theta}+\dfrac{g}{R}\cos\theta+\omega^2(1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta=0$

b) $\dfrac{g}{R}\cos\theta+\omega^2(1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta=0$

Ejercicio 10 **c)** $t_1 = \frac{8}{9}\frac{a}{v_0}$

Ejercicio 11 **a)** $\mathrm{T_R} = 2mc^2t^2$, $\mathrm{T_A} = \frac{1}{2}m(\mathrm{v}_0^2 + 2\sqrt{2}\mathrm{v}_0 ct + 4c^2t^2)$

b) $\mathrm{P_R} = 4mc^2t^2$, $\mathrm{P_A} = m(\sqrt{2}\mathrm{v}_0 c + 4c^2 t)$

c) La Energía Cinética y la Potencia, a pesar de ser cantidades escalares, están definida a través de la velocidad que es un concepto relativo al sistema de referencia. Para interpretar la diferencia entre la potencia "relativa" y "absoluta" debemos estudiar el concepto de potencia, trabajo y energías sobre un sistema de partículas y no una partícula aislada, y tener en cuenta el principio de acción y reacción.