Mecánica clásica

Práctico IV – Fuerzas centrales

Ejercicio 1

Una partícula P de masa *m* se mueve sin rozamiento sobre una mesa horizontal, unida a un hilo flexible, inextensible y sin masa que pasa por un orificio situado en la mesa. Inicialmente la partícula está describiendo un movimiento circular uniforme de radio *a* con velocidad v_a. Una persona tira *lentamente* del hilo (se puede considerar que en todo instante la velocidad radial es nula) hasta que la partícula describe una circunferencia de radio *b*.

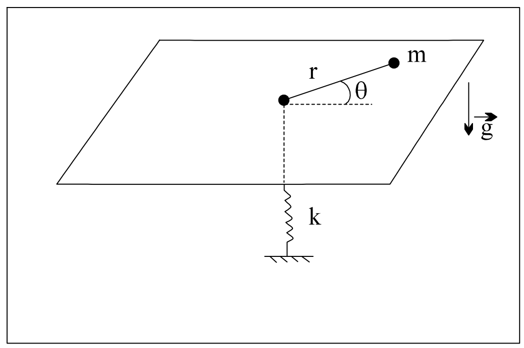
a) Calcule la velocidad v_b de la partícula cuando esta describe la circunferencia de radio *b*, y compárela con v_a.

b) Calcule las tensiones en el hilo, en los movimientos inicial y final.

c) Calcule el trabajo realizado por la persona.

Ejercicio 2

La partícula de masa m de la figura se mueve sobre una mesa lisa horizontal. La cuerda (flexible, inextensible y sin masa) unida a la partícula, pasa a través de un orificio en la mesa y está atada a un resorte de constante *k*. La longitud natural del resorte es tal que la fuerza del mismo es nula cuando *r* (distancia del orificio a la partícula) es igual a cero. En el instante inicial *r* = *R*, la velocidad radial de la partícula es nula y su velocidad angular ω.



a) Escriba las ecuaciones del movimiento de la partícula y hallar $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ en función de los datos iniciales del problema.

b) Determine la expresión de $\dot{r}^2$ (velocidad radial al cuadrado), en función de r^2 y los otros datos del problema.

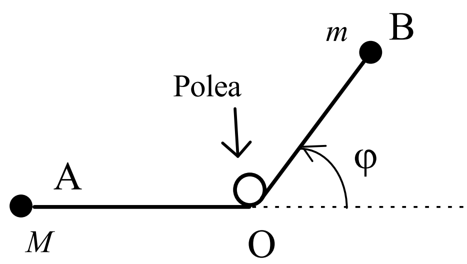
c) ¿Para qué valor de ω la trayectoria es circular? Sea ω_0 ese valor.

d) Si $0 < \omega < \omega_0$, ¿llegará la partícula al orificio por donde pasa el hilo? Justifique su respuesta. En el caso en que su respuesta sea negativa, ¿cuál es el valor mínimo de r de la trayectoria?

e) Si $\omega > \omega_0$, calcule el valor de r máximo de esta nueva trayectoria.

Ejercicio 3

La figura muestra un plano liso horizontal y dos partículas A y B de masa *M* y *m* respectivamente, unidas por un hilo flexible, inextensible y sin masa, que puede deslizar sin frotamiento sobre la polea del esquema. El punto A se encuentra inicialmente en reposo y el estado inicial de movimiento de B es tal que $\varphi = 0$, la distancia OB es igual a *a* y tiene velocidad v_0 perpendicular a OB.



a) Halle las ecuaciones del movimiento y la tensión en el hilo.

b) Suponiendo la longitud del hilo suficientemente grande, determine la condición que se debe verificar para que en algún instante sea $\varphi = \pi$.

Sugerencia: Use las fórmulas de Binet.

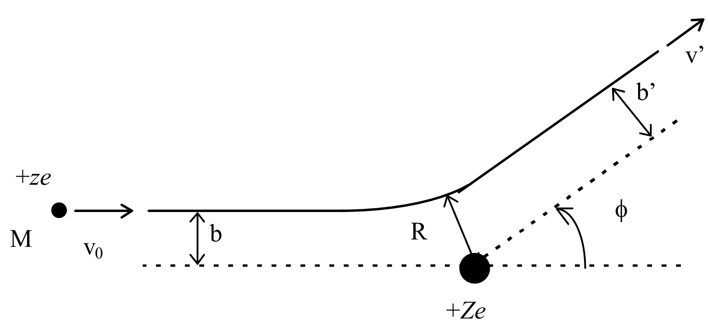
c) Indique si el sistema formado por ambas partículas conserva su energía. Justifique. De ser afirmativo, halle la energía mecánica del sistema.

Ejercicio 4

En el estudio de sistemas atómicos es necesario conocer cómo se desvía una partícula “proyectil” (una partícula α, por ejemplo) en el “choque” con un “blanco” (núcleo atómico).

Para ello asumamos que el proyectil es una partícula cargada positivamente, de masa M y carga $+ze$, que se acerca al blanco desde el infinito con velocidad $\vec{v}_0$. El blanco está también cargado positivamente (carga $+Ze$) y es muy masivo, de forma que se considera fijo. La interacción entre ambas partículas es una fuerza radial repulsiva proporcional a las cargas y que varía con el inverso de la distancia al cuadrado:

$$\vec{F} = \frac{zZe^2}{r^2}\hat{e}_r$$



Esta fuerza es despreciable cuando ambas partículas están muy alejadas, por lo que inicialmente el proyectil se moverá sobre una recta, y después del “choque” también.

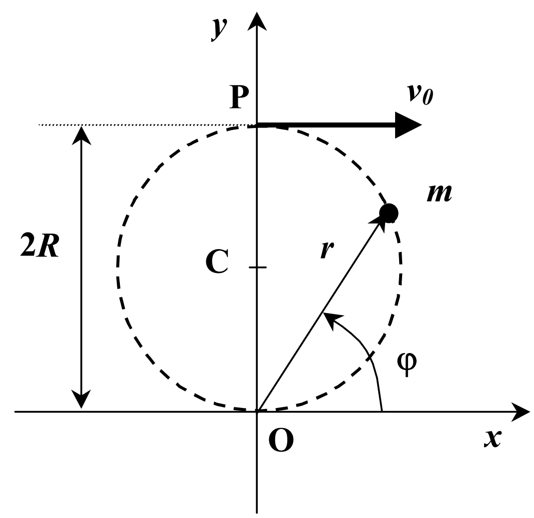
a) Halle el ángulo ϕ entre ambas rectas, en función del parámetro de impacto b, definido como la distancia entre la recta del movimiento inicial y una paralela a ella que pasa por el blanco (ver Figura).

Nota: Puede ser cómodo definir el parámetro $D = \dfrac{2zZe^2}{Mv_0^2}$ para simplificar la notación.

b) Halle R, la distancia de máximo acercamiento (menor distancia entre el proyectil y el blanco). Estudiando los casos límites $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi$ interprete físicamente el parámetro D.

Ejercicio 5

Una partícula de masa m, sometida *solamente* a la acción de una fuerza central atractiva $\vec{F}(r)$, describe una trayectoria circular de radio R. El polo del movimiento central (centro de fuerzas) **O** se encuentra sobre dicha trayectoria, y la partícula parte del punto **P** diametralmente opuesto, con velocidad v_0.



La ecuación de dicha trayectoria, expresada en coordenadas polares con origen en el centro de fuerzas (ver figura), es $r(\varphi) = 2\,R$ sen φ.

a) Demuestre que para que el movimiento de la partícula sea el indicado la fuerza atractiva debe tener módulo:

$$\boldsymbol{F(r)=\frac{K}{r^5}} \qquad (\boldsymbol{K} \text{ constante})$$

b) Halle además cuál debe ser la condición inicial v_0, en función de $\boldsymbol{K}$ y los demás parámetros del problema, para que efectivamente la trayectoria sea esa.

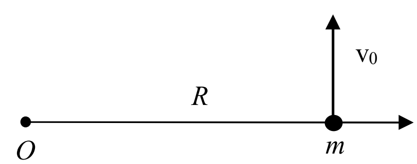
c) Halle y grafique el potencial efectivo suponiendo que éste se anula en el infinito.

d) Demuestre que la energía del movimiento antes descrito es igual a cero.

e) Calcule el tiempo que demora la partícula en alcanzar el centro de fuerzas **O**, si parte del punto **P** con la velocidad hallada anteriormente

Ejercicio 6

Una partícula de masa m se mueve en un campo gravitatorio y existe además una perturbación proporcional a r^{-3}, ambos campos son centrales con centro O. La fuerza central resultante es:



$$\vec{F}(r) = -\frac{k_1}{r^2}\hat{e}_r - \frac{k_2}{r^3}\hat{e}_r \ , \quad \text{con} \quad k_1, k_2 > 0$$

La partícula parte con velocidad v_0 perpendicular al eje Ox del dibujo (que puede ser tomado como origen de los ángulos) y a una distancia R de O.

a) Si $v_0^2 > \frac{k_2}{mR^2}$, bosqueje el potencial efectivo visto por la partícula. Halle la condición para que el movimiento sea acotado.

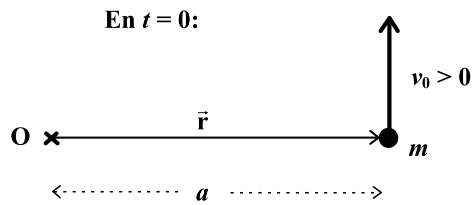
b) Determine la ecuación polar de la trayectoria de la partícula: $r = r(\theta)$. Suponga que v_0 cumple la condición para que el movimiento sea acotado hallada en b).

c) Halle la separación angular entre dos máximos consecutivos de r y determine la condición que deben verificar los parámetros para que la órbita sea cerrada.

Ejercicio 7

Sobre una partícula de masa m actúa una fuerza central atractiva inversamente proporcional al cubo de la distancia al origen **O,** o sea, una fuerza de componente radial $-\frac{k}{r^3}$. Vectorialmente esto se escribe como:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{k}{r^3}\hat{e}_r \qquad \text{con } k > 0.$$



En el instante inicial la partícula se encuentra a una distancia a del origen y su velocidad inicial, de magnitud v_0, es perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}$.

a) Halle la energía potencial, si es que existe, asociada a dicha fuerza.

b) Escriba el Teorema de la Energía para este problema y grafique el potencial efectivo del movimiento radial de la partícula, para diferentes valores de v_0. A partir de dicha figura discuta en qué regiones del plano es posible el movimiento de la partícula según sea v_0.

c) A partir de las ecuaciones de movimiento verifique que existe una velocidad inicial para la que el movimiento de la partícula sea circular uniforme. ¿Cuál es esa velocidad?

d) Para una velocidad menor que la hallada en la parte anterior, determine cuál es la trayectoria que seguirá la partícula y verifique que la misma colapsa hacia el origen (se acerca infinitamente al mismo).

Ejercicio 8

Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de una fuerza central, cuyo potencial es de la forma: $U(r) = -\frac{K}{r^\alpha}$.

a) Halle la frecuencia de una órbita circular con momento angular L dado.

b) Suponga que se perturba ligeramente la órbita circular por una cantidad radial z, de modo que: $r = r_0 + z$. Demuestre que el movimiento de z es periódico y halle su frecuencia. Para esto desarrolle $U'_{ef}(r)$ en la ecuación de Newton radial: $m\ddot{r} = -U'_{ef}(r)$ a primer orden en z en torno a r_0 y halle la ecuación diferencial que cumple $z(t)$.

c) Halle la condición que debe cumplir α para que la órbita perturbada sea cerrada, esto es, que la frecuencia de oscilación radial sea un múltiplo de la frecuencia de la órbita circular.

Ejercicio 9

Un planeta esférico e inmóvil tiene masa M y radio R. Una partícula de masa m se dispara desde su superficie con velocidad $v = \frac{3}{4} v_{\text{esc}}$ (v_{esc} = velocidad de escape).

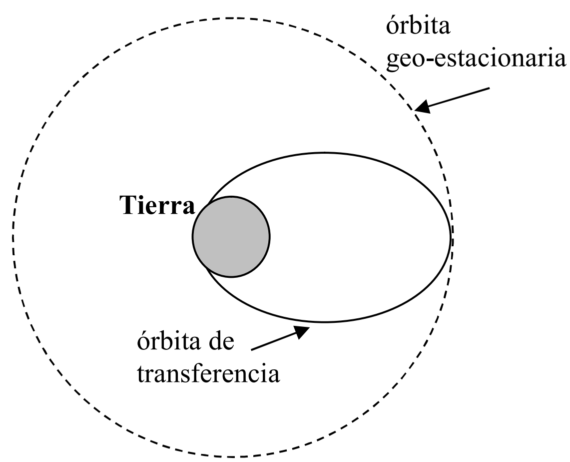
Calcular la máxima distancia alcanzada por la partícula (medida desde el centro de fuerza) si se dispara:

a) radialmente.

b) tangencialmente a la superficie del planeta. En este caso bosquejar el potencial efectivo visto por la partícula.

Ejercicio 10

Julio Verne concibió un viaje a la Luna utilizando un cañón para lanzar una cápsula tripulada hacia nuestro satélite natural. Siendo menos ambiciosos que el mencionado novelista, consideraremos un viaje de ida a una órbita geo-estacionaria (Es decir una órbita para la cual la velocidad relativa entre el satélite y la Tierra es nula) utilizando su cañón. Ubicaremos dicho cañón sobre el ecuador y se lo apuntará según la vertical del lugar. Se tomará en cuenta la rotación de la Tierra (a una velocidad angular ω_T) pero se despreciará los efectos disipativos de la atmósfera terrestre. Nuestra cápsula tendrá una masa $\mathbf{m_C}$.



a) Calcule el radio de la órbita geo-estacionaria $\mathbf{R_G}$ en función de **g** (aceleración de la gravedad en la superficie terrestre), $\mathbf{R_T}$ (radio de la Tierra) y ω_T.

Se desea alcanzar la órbita geo-estacionaria a través de una órbita de transferencia elíptica tangente a la órbita geo-estacionaria como la que se muestra en la figura.

b) Calcule el valor de la constante ***l*** (módulo del momento angular) para la órbita de transferencia.

c) Calcule la energía de la órbita de transferencia considerada (exprese el resultado en función de los parámetros anteriormente citados).

d) Calcule la velocidad $\mathbf{v_c}$ que deberá tener la cápsula a la salida del cañón (en relación a éste) para ubicarse en la órbita de transferencia.

e) Calcule el semieje mayor de la órbita de transferencia y el tiempo necesario para el viaje suponiendo que éste corresponde (aproximadamente) al semiperíodo de la órbita de transferencia.

Resultados

Ejercicio 1 **a)** $\mathrm{v_b} = \frac{a}{b}\mathrm{v_a}$ **b)** $\mathrm{T_i} = m\frac{\mathrm{v_a^2}}{a}$, $\mathrm{T_f} = m\frac{a^2\mathrm{v_a^2}}{b^3}$ **c)** $\frac{1}{2}m\mathrm{v_a^2}\frac{a^2-b^2}{b^2}$

Ejercicio 2 **a)** $L = mr^2\omega$ **b)** $\dot{r}^2 = \frac{R^2}{r^2}\omega^2(r^2-R^2)+\frac{k}{m}(R^2-r^2)$ **c)** $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

d) $r_{min} = \omega R/\omega_0$, $r_{max} = R$ **e)** $r_{min} = R$, $r_{max} = \omega R/\omega_0$

Ejercicio 3 **a)** $(m+M)\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = 0$, $2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi} = 0$, $T(r) = \frac{mM}{m+M}\frac{a^2\mathrm{v}_0^2}{r^3}$

b) $M > 3m$ **c)** $\frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2$

Ejercicio 4 **a)** $\mathrm{tg}\frac{\phi}{2} = \frac{D}{2b}$ **b)** $R = \frac{D}{2}\left(1+\frac{1}{\mathrm{sen}(\phi/2)}\right)$

Ejercicio 5 **b)** $v_0 = \frac{1}{R^2}\sqrt{\frac{K}{32m}}$ **c)** $U_{ef}(r) = \frac{l^2}{2m}\frac{1}{r^2}-\frac{K}{4}\frac{1}{r^4}$ **e)** $t = \frac{\pi R}{2v_0}$

Ejercicio 6 **a)** $U_{ef}(r) = \frac{(mRv_0)^2 - mk_2}{2mr^2}-\frac{k_1}{r}$

b)
$$u(\theta) = \left(\frac{1}{R}-\frac{1}{pW^2}\right)\cos(W\theta) + \frac{1}{pW^2} \qquad \frac{1}{p} = \frac{k_1}{mR^2v_0^2}$$
$$W^2 = 1-\frac{k_2}{mR^2v_0^2}$$

c) $\Delta\theta = \frac{2\pi}{W}$

Ejercicio 7 **a** $U(r) = -\frac{k}{2r^2}$ **b)** $U_{ef}(r) = \frac{ma^2v_0^2 - k}{r^2}$

c) $v_0{}^2 = \frac{k}{ma^2}$ **d)** $r(\theta) = \frac{a}{\mathrm{Cosh}(W\theta)}$ $W^2 = \frac{k}{m\,a^2v_0^2} - 1$

Ejercicio 9 **a)** 16R/7 **b)** 9R/7

Ejercicio 10 **a)** $R_G^3 = \frac{g\,R_T^2}{\omega_T^2}$ **b)** $l = m\,R_T^2\,\omega_T$ **c)** $E = \frac{1}{2}m(v_c^2+.\omega_T^2R^2) - \frac{GMm}{R_T}$

d) $v_c^2 = .\omega_T^2R_T^2 + \frac{\omega_T^2R_T^4}{R_G^2} + 2GM\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_G}\right)$ **e)** $a = -\frac{GMm}{2E}$