Mecánica clásica

Práctico V – Sistemas de partículas y Sistemas rígidos

Parte A: Sistemas de Partículas

Ejercicio 1

Halle el centro de masa de las siguientes figuras homogéneas (con densidad de masa uniforme):

a) Sector de círculo de ángulo al centro 2α.

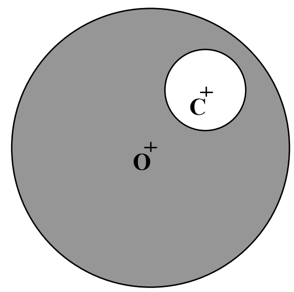
b) Arco de circunferencia de ángulo al centro 2α

c) Triángulo isósceles de base $2r$ y altura h

d) Cono de revolución de radio r y altura h.

Ejercicio 2

Halle el centro de masa de un disco de radio a que tiene un agujero circular de radio b. Este agujero está centrado en un punto C que dista d del centro O del disco. Supondremos se verifica que $0 < d < a - b$.



Ejercicio 3

a) Demuestre que el conjunto de ecuaciones dado por una primera cardinal y una segunda cardinal, aplicada en un punto Q, es equivalente a una primera cardinal y una segunda cardinal aplicada en otro punto R cualquiera. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\vec{\mathbf{P}}} = M\,\vec{\mathbf{a}}_G = \vec{\mathbf{R}}^{(ext)} \\ \dot{\vec{\mathbf{L}}}_Q = \vec{\mathbf{P}}\times \dot{Q} + \vec{\mathbf{M}}_Q^{(ext)} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{\vec{\mathbf{P}}} = M\,\vec{\mathbf{a}}_G = \vec{\mathbf{R}}^{(ext)} \\ \dot{\vec{\mathbf{L}}}_R = \vec{\mathbf{P}}\times \dot{R} + \vec{\mathbf{M}}_R^{(ext)} \end{array}\right.$$

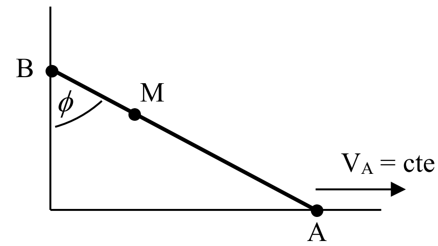
b) Demuestre análogamente que el conjunto de ecuaciones dado por una primera cardinal y una segunda cardinal en un punto Q, es equivalente al conjunto de tres ecuaciones obtenido de aplicar la segunda cardinal en tres puntos no alineados cualesquiera, por ejemplo, Q, R y S (Sugerencia: usar fórmulas de cambio de momentos):

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\vec{\mathbf{P}}} = M\,\vec{\mathbf{a}}_G = \vec{\mathbf{R}}^{(ext)} \\ \dot{\vec{\mathbf{L}}}_Q = \vec{\mathbf{P}}\times \dot{Q} + \vec{\mathbf{M}}_Q^{(ext)} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{\vec{\mathbf{L}}}_Q = \vec{\mathbf{P}}\times \dot{Q} + \vec{\mathbf{M}}_Q^{(ext)} \\ \dot{\vec{\mathbf{L}}}_R = \vec{\mathbf{P}}\times \dot{R} + \vec{\mathbf{M}}_R^{(ext)} \\ \dot{\vec{\mathbf{L}}}_S = \vec{\mathbf{P}}\times \dot{S} + \vec{\mathbf{M}}_S^{(ext)} \end{array}\right.$$

Parte B: Cinemática del Rígido

Ejercicio 4

La barra AB, de longitud l, se mueve de forma que su extremo A recorre el eje Ox, con velocidad v_A constante, mientras que su otro extremo B se mueve sobre el eje Oy. En el instante inicial ($t = 0$) el punto A coincide con el origen de coordenadas.



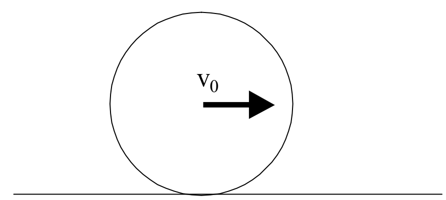
a) Halle la velocidad del punto B.

b) Halle la velocidad angular de la barra $\vec{\omega}(t)$

c) Si llamamos M a un punto genérico de la barra que dista $d < l$ del extremo A, halle la velocidad $\vec{v}(M)$ de ese punto, su aceleración $\vec{a}(M)$ y su trayectoria.

Ejercicio 5

El disco de la figura, de radio a, rueda sin deslizar sobre una guía rectilínea y su centro tiene velocidad v_0. Hallar:



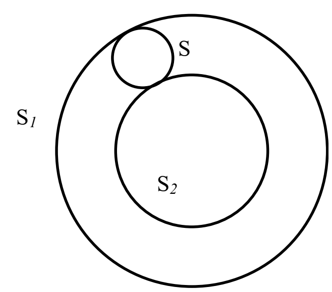
a) La trayectoria de un punto de la periferia.

b) La distribución de velocidades y aceleraciones de los puntos de la periferia.

Caso Particular: halle la velocidad y aceleración del punto más alto.

Ejercicio 6

Dos discos concéntricos circulares S_1 y S_2, de radios R_1 R_2, con $R_1 > R_2$, giran alrededor de su centro O con velocidades angulares ω_1 y ω_2, respectivamente. Un disco circular S, de radio $a = \dfrac{R_1 - R_2}{2}$ rueda sin deslizar sobre S_1 y S_2.

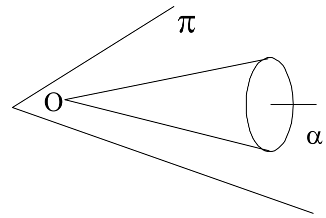


a) Halle la velocidad angular de S.

b) Halle la velocidad del centro de S.

c) Estudie los diferentes casos para el movimiento de S según sea la relación entre los parámetros.

Ejercicio 7



Un cono circular recto, de vértice O, y ángulo 2α, *rueda sin deslizar* sobre un plano π. La recta de contacto entre el cono y el plano se comporta como un *eje instantáneo* de rotación, porque, debido a la rodadura, los puntos del cono que están en esa posición tienen velocidad *instantánea* nula.

Determine la velocidad angular del cono en términos de la velocidad angular de la recta de contacto con el plano.

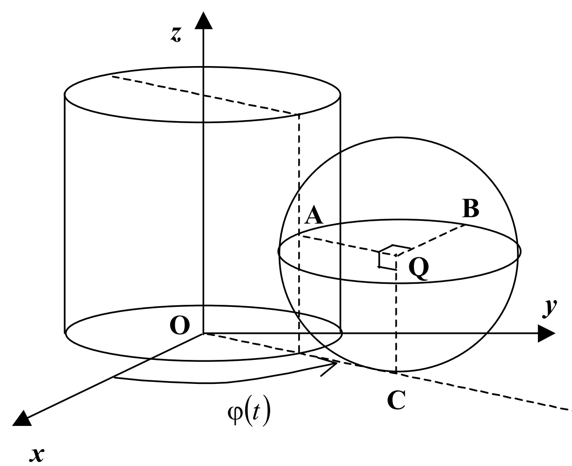
Observación: Este problema puede hacerse de dos formas:

1) Hallando la velocidad del centro de la base del cono y aplicar la distribución de velocidades entre tres puntos no alineados.

2) Descomponiendo el movimiento del cono en rotaciones simples y utilizando el teorema de adición de velocidades angulares para hallar una expresión de la velocidad angular. Posteriormente aplicando la rodadura para llegar al resultado final.

Ejercicio 8

Un cilindro circular de radio R está *fijo* verticalmente sobre un plano horizontal. Una esfera, también de radio R, se mueve de modo que rueda sin deslizar simultáneamente sobre el plano horizontal y sobre la superficie del cilindro. Llamaremos Q a su centro, A al punto de contacto entre esfera y cilindro, C al punto de contacto entre la esfera y el plano y B a un punto que se ubica en el extremo del radio vector perpendicular a QA y QC. En coordenadas cilíndricas con eje en el eje del cilindro y origen en la intersección de este con el plano horizontal (ver figura):



$$\mathrm{C} = \mathrm{O} + 2R\vec{\mathbf{e}}_\rho \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{C} + R\vec{\mathbf{k}}$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{Q} - R\vec{\mathbf{e}}_\rho \qquad \mathrm{B} = \mathrm{Q} + R\vec{\mathbf{e}}_\varphi$$

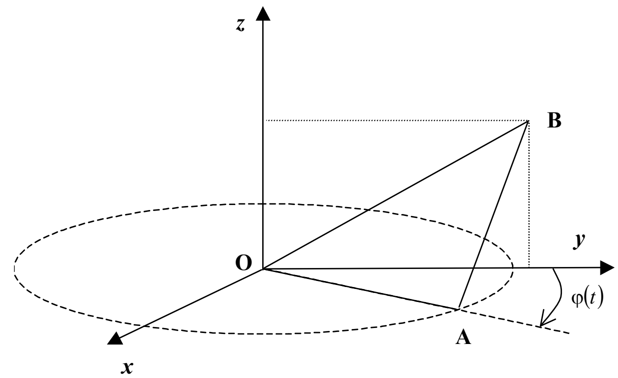
a) Halle el vector $\vec{\omega}$, velocidad angular de la esfera, en función del ángulo φ.

b) Determine la ecuación diferencial que debe verificar el ángulo $\varphi(t)$ para que el punto B tenga su velocidad y aceleración perpendiculares en todo instante.

c) Exprese la aceleración del punto B en función de la velocidad inicial del centro de la esfera y del tiempo.

Ejercicio 9

Una placa triangular OAB es isósceles (OA = AB = a) y recta en A. Esta placa se mueve de forma tal que O es fijo, OA pertenece al plano Oxy, A describe un movimiento circular uniforme en torno a O, y B pertenece al plano Oyz.



a) Halle la velocidad de B en función del módulo de la velocidad del punto A, v_A.

b) Hallar la velocidad angular de la placa.

c) Si en el instante inicial la placa se encuentra contenida en el plano vertical, ¿durante qué intervalo de tiempo podrá mantenerse este estado de movimiento?

Parte C: Cinética del Rígido

Ejercicio 10

Halle el tensor de inercia en el centro de masa G de los siguientes sistemas rígidos homogéneos:

a) Disco de radio R.

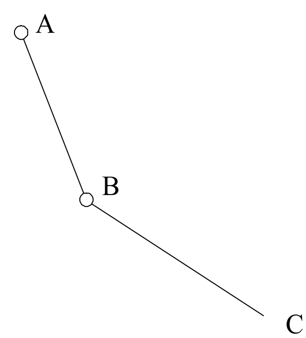
b) Placa rectangular de lados a y b.

c) Esfera de radio R.

d) Superficie esférica de radio R.

Ejercicio 11

Se consideran las dos barras iguales AB y BC de la figura. Las barras tienen masa m y longitud $2l$ y están articuladas en A y B, con A fijo, siendo ambas articulaciones *cilíndricas* y *lisas*, de forma que las barras se mueven manteniéndose siempre contenidas en el mismo plano.



a) Calcule la energía cinética total T del sistema formado por las dos barras.

b) Calcule el momento angular respecto al punto B de la barra BC.

c) Calcule el momento angular respecto al punto A del sistema total.

Resultados

Ejercicio 1 a) $r = \dfrac{2R\,\mathrm{sen}\,\alpha}{3\alpha}$, b) $r = \dfrac{R\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\alpha}$, c) $z = \dfrac{h}{3}$, d) $z = \dfrac{h}{4}$

Ejercicio 2 El CM está a una distancia: $\dfrac{b^2 d}{a^2 - b^2}$ de O, según CO.

Ejercicio 4 $\vec{\omega}(t) = \dfrac{\mathrm{v_A}}{\sqrt{l^2 - \mathrm{v_A^2} t^2}}\hat{k}$, $\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{M}}(t) = \left(1 - \dfrac{d}{l}\right)\mathrm{v_A}\hat{\imath} - \dfrac{d}{l}\dfrac{\mathrm{v_A^2} t}{\sqrt{l^2 - \mathrm{v_A^2} t^2}}\hat{\jmath}$,

$\vec{a}_M(t) = -\dfrac{\mathrm{v_A^2} dl}{\left(l^2 - \mathrm{v_A^2} t^2\right)^{3/2}}\hat{\jmath}$. Trayectoria: $\dfrac{x_M^2}{(l-d)^2} + \dfrac{y_M^2}{d^2} = 1$ (elipse).

Ejercicio 5 a) $x_P(t) = vt + R\,\mathrm{sen}(vt/R)$, $y_P(t) = R\left[1 + \cos(vt/R)\right]$ (cicloide).

b) $\vec{v}_P = v(1 + \cos\varphi)\hat{\imath} - v\,\mathrm{sen}\,\varphi\hat{\jmath}$, $\vec{a}_P = -\dfrac{v^2}{R}\mathrm{sen}\,\varphi\hat{\imath} - \dfrac{v^2}{R}\cos\varphi\hat{\jmath}$.

Punto más alto: $\vec{v}_P = 2v\hat{\imath}$ y $\vec{a}_P = -\dfrac{v^2}{R}\hat{\jmath}$.

Ejercicio 6 $\omega = \dfrac{R_1\omega_1 - R_2\omega_2}{R_1 - R_2}$ es la velocidad angular de S y $\dot{\varphi} = \dfrac{R_1\omega_1 + R_2\omega_2}{R_1 + R_2}$ la velocidad angular del centro de S en torno a O.

Ejercicio 7 $\vec{\omega} = -(\dot{\varphi}\cot g\alpha)\hat{u}$ con $\dot{\varphi}$ la velocidad angular en torno a O de la recta de contacto y $\hat{u}$ en la dirección de esta recta.

Ejercicio 8 c) $\varphi = -\ln\left|1 - \dot{\varphi}_0 t\right|$, $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(0)$; d) $\vec{a}_B = -\dfrac{2R\mathrm{v}_0}{(2R - \mathrm{v}_0 t)^2}\left(2\hat{e}_r + 3\hat{e}_\varphi + \hat{K}\right)$

Ejercicio 9 a) $\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{B}} = \dfrac{tg\varphi}{\sqrt{2\cos^2\varphi - 1}}\sqrt{2}a\dot{\varphi}\hat{e}_\theta$ b) $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\hat{I} - \dfrac{\dot{\varphi}}{tg\varphi}\hat{J} - \dot{\varphi}\hat{K}$.

Ejercicio 11 a) $T = \dfrac{8}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + \dfrac{2}{3}ml^2\dot{\psi}^2 + 2ml^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi)$ donde φ es el ángulo que forma la barra AB con una recta fija y ψ es el ángulo que forma la barra BC con la misma recta.

b) $\vec{L}_B = 2ml^2\left(\dot{\varphi}\cos(\varphi - \psi) + \dfrac{2}{3}\dot{\psi}\right)\hat{k}$.