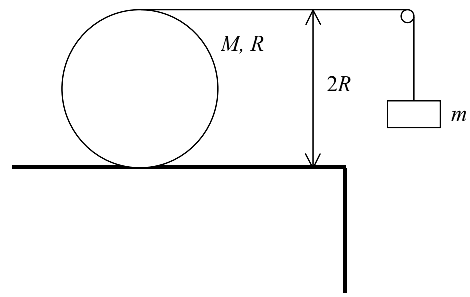
Mecánica clásica

Práctico VI – Dinámica del Rígido

Movimiento plano

Parte A: Dinámica de Sistemas Rígidos

Ejercicio 1



Se considera el sistema de la figura formado por un disco homogéneo de masa M y radio R. El disco rueda sin deslizar sobre un plano horizontal y tiene una cuerda enrollada sobre él. Una masa m está atada a la cuerda, luego de que esta última pasa por una polea. Esta polea está fija y no tiene rozamiento. La posición de la polea es tal que la parte de la cuerda que queda entre ella y el disco permanece horizontal. El otro tramo de la cuerda (entre la polea y la masa) permanece vertical.

Calcule la aceleración del centro del disco.

Ejercicio 2

Un jugador de bowling lanza una bola a lo largo de una pista horizontal con una velocidad inicial v_0 (en su centro) y velocidad angular nula. Supongamos que la bola tiene masa M y radio R, siendo f el coeficiente de rozamiento entre la bola y la pista.

a) ¿Durante qué lapso de tiempo desliza la bola?

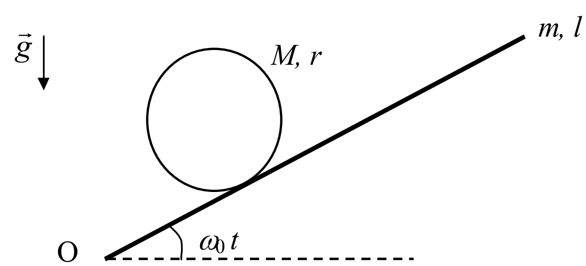
b) ¿A lo largo de qué distancia desliza la bola?

c) ¿Cuántas vueltas da la bola antes de que comience a rodar sin deslizar?

d) ¿Con qué velocidad se mueve cuando empieza a rodar sin deslizar?

e) Calcule el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento integrando en el tiempo la potencia disipada por esta fuerza.

Ejercicio 3



Una barra homogénea de longitud l y masa m se halla articulada por uno de sus extremos al punto fijo O. Sobre ella se apoya, rodando sin deslizar, un disco homogéneo de radio r y masa M. Todo el sistema se halla en un plano vertical fijo. Sobre la barra se aplica un momento M horizontal y ortogonal a la misma, de modo que la barra gire con velocidad angular constante ω_0.

En el instante inicial, la barra se encuentra horizontal, a la derecha de O, con el disco apoyado a distancia despreciable de O y la velocidad del centro del disco, relativa a la barra, es $2g/5\omega_0$ dirigida hacia la derecha.

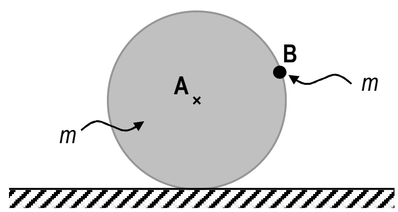
a) Halle la ley horaria $x(t)$, donde x es la posición del centro del disco sobre la barra con respecto a O.

b) Determine las reacciones en el contacto entre el disco y la barra como función del tiempo. Luego, halle la condición que debe cumplir ω_0 para que el disco no se desprenda en un entorno del instante inicial.

c) Halle el valor del par aplicado sobre la barra M.

Parte B: Sistemas Rígidos Conservativos.

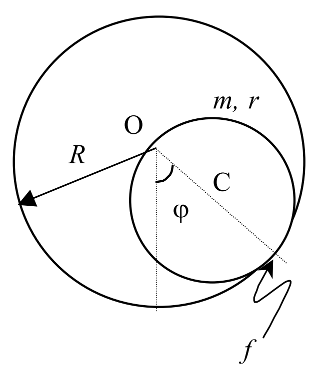
Ejercicio 4



Un disco homogéneo de centro A, de masa m y radio r se mueve sobre un plano horizontal. El contacto entre el disco y el plano es rugoso con coeficiente de rozamiento estático f. En la periferia del disco hay una partícula B incrustada de igual masa m.

a) Suponiendo que no hay deslizamiento entre el disco y el plano, hallar la ecuación de movimiento del sistema.
b) Si en el instante inicial el cuerpo parte del reposo con AB horizontal, determinar la condición para que no haya deslizamiento en el instante inicial.
c) Si ahora inicialmente B está en su posición más alta, hallar la condición a verificar por las restantes condiciones iniciales para que no haya desprendimiento entre el disco y el plano en el instante inicial.

Ejercicio 5



Un disco de masa m y radio r rueda sin deslizar en el interior de un aro fijo de radio R. El aro se encuentra en un plano vertical y el disco se mueve también contenido en el mismo plano.

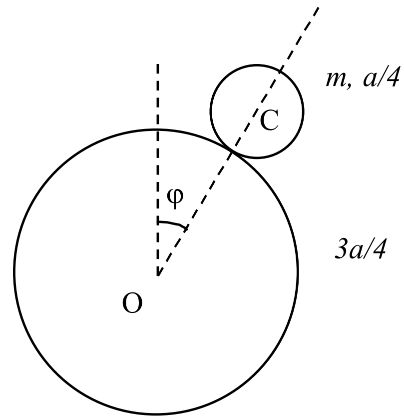
a) Suponiendo, que la velocidad del centro del disco cuando pasa por la parte inferior del aro es v_0:

1) Halle la ecuación de movimiento del disco.

2) Determine las reacciones en el punto de contacto.

b) Suponiendo ahora que inicialmente el disco parte del reposo para un ángulo φ_0, y que el coeficiente de rozamiento entre el aro y el disco vale *f*, calcule el coeficiente de rozamiento mínimo para que haya rodadura sin deslizamiento en ese instante.

Ejercicio 6



Un disco de masa *m* y radio *r* = *a/4* se encuentra inicialmente sobre la parte superior de otro disco fijo de radio *R* = *3a/4*. Ambos discos se encuentran ubicados en un plano vertical. Se le da una pequeña velocidad $v_0 \approx 0$ al centro del disco C de manera tal que comienza a caer. El coeficiente de rozamiento entre ambos discos vale *f* = 1.

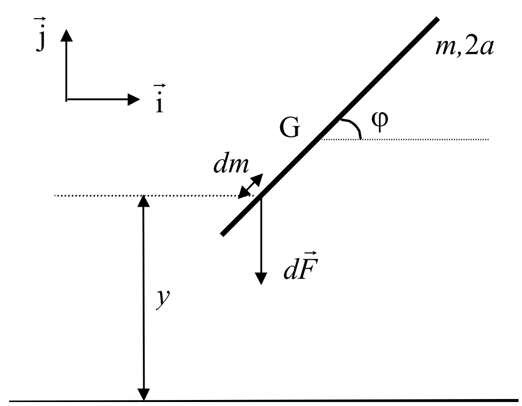
a) Halle las ecuaciones de movimiento del disco, en un entorno del instante inicial (mientras rueda sin deslizar).

b) Halle el ángulo φ_0 a partir del cual el disco comienza a deslizar.

c) Halle las ecuaciones de movimiento en un entorno posterior en el cual comienza a deslizar.

d) Calcule el ángulo φ_d de desprendimiento en el cual el disco más chico deja de tener contacto con el más grande.

Ejercicio 7



Una varilla rectilínea homogénea de masa *m*, de longitud *2a*, se puede desplazar sin rozamiento sobre una mesa horizontal fija. Cada elemento de la varilla es atraído por una recta fija de la mesa según una fuerza $d\vec{F} = -Kydm\vec{j}$ proporcional al elemento de masa *dm* y a su respectiva distancia a la recta y.

a) Halle la resultante $\vec{R}$ y el momento de las fuerzas externas $\vec{M}_G$, en el centro de masa G de la barra del conjunto de fuerzas aplicadas.

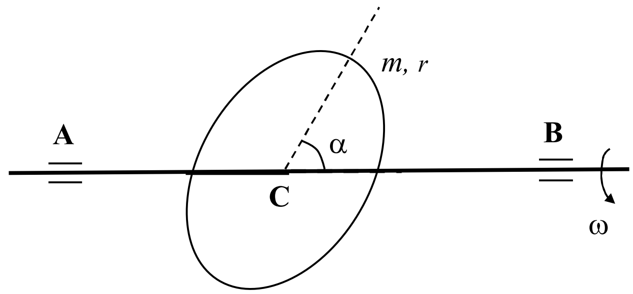
b) Halle las ecuaciones de movimiento.

c) Observe que el sistema es conservativo. Calcule el trabajo infinitesimal *dW* necesario que deben realizar las fuerzas externas al desplazarse la barra una distancia infinitesimal sobre la mesa (usar los valores de $\vec{R}$ y de $\vec{M}_G$ hallados). Halle la energía potencial del sistema.

d) Determine las configuraciones de equilibrio y estudiar su estabilidad.

Movimiento en el espacio

Ejercicio 1



Se considera un disco homogéneo de masa m y radio r, soldado en su centro **C** a un eje de masa despreciable. El plano del disco forma un ángulo α constante con el eje. Se coloca el eje horizontalmente sobre los apoyos lisos **A** y **B**, simétricos respecto a **C**, que permanece fijo, y se lo hace girar con velocidad angular ω constante.

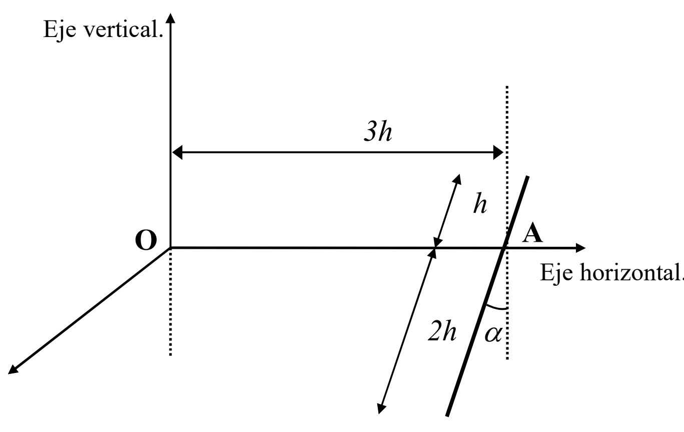
a) Halle las resultantes de las fuerzas aplicadas sobre el disco para que el movimiento sea posible (resultante y par de la distribución de reactivas que se tiene en la soldadura del disco con el eje).

Nota: Observe que si el centro de masa del disco no estuviese sobre el eje la resultante de las fuerzas no quedaría tan simple.

b) Consideremos como sistema el disco más el eje. Determine las fuerzas y pares aplicadas sobre el sistema.

Nota: Observe que para el caso α = 90º el par necesario que debe aplicarse para mantener el movimiento se reduce a cero y el sistema simplemente gira por inercia.

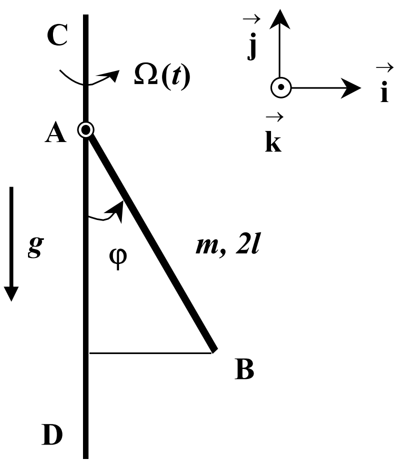
Ejercicio 2



Una barra homogénea de longitud $3h$ y masa m, puede girar libremente alrededor de un eje horizontal. En A, a una distancia h de un extremo de la barra, hay una articulación cilíndrica lisa cuyo eje es el eje horizontal antes mencionado. Éste último gira con velocidad angular constante ω en torno de un eje vertical que pasa por O, que dista 3 h del punto A, como se muestra en la figura. Durante el movimiento, el ángulo α que forma la placa con el plano vertical es constante.

Halle los valores posibles de α en función de ω.

Ejercicio 3



Una barra homogénea AB de masa m y longitud $2l$ está unida a un eje vertical CD en su extremo A, que permanece *fijo* respecto a un sistema de referencia *inercial*. La unión en el punto A está hecha a través de una articulación cilíndrica *lisa*, que permite a la barra girar libremente en un plano vertical que contiene al eje CD; pero a su vez obliga a este plano a girar en torno a CD con velocidad angular impuesta $\Omega(t) = \Omega_0 + \alpha t$, siendo Ω_0 y α ambos positivos $\left(\Omega(0) = \Omega_0 > 0, \dot{\Omega} = \alpha > 0\right)$.

El extremo B de la barra se ata al eje CD por medio de un hilo inextensible (de longitud $2l\operatorname{sen}\varphi_0$) que permanece tenso en posición horizontal y asegura que $\varphi = \varphi_0 < \pi/2$ sea constante, siendo φ el ángulo entre la barra AB y el eje CD, como indicado en la figura.

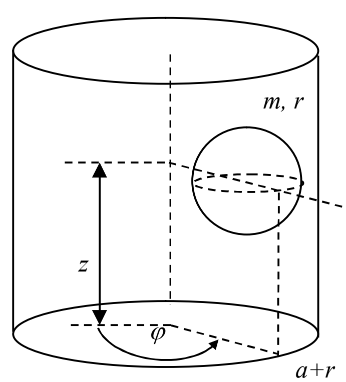
Nota: El vínculo en A es tal que el momento de fuerzas que se transfiere a la barra en A es: $\vec{\mathbf{M}}_A^{(r)} = \mathrm{M}\,\vec{\mathbf{j}} + \mu\,\vec{\mathbf{i}}$, escrito en una base $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ solidaria al plano. M es el par motor que hace girar al plano, y μ es un par reactivo que obliga a la barra a permanecer en ese plano vertical rotatorio. Es $\vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{M}}_A^{(r)} = 0$ por ser la articulación lisa.

a) Halle el valor mínimo de Ω_0 para el cuál el hilo permanece efectivamente tenso para todo instante $t > 0$.

b) Si se verifica la condición anterior, halle el par motor M que hay que aplicar para asegurar que el sistema se mueva con esta velocidad angular $\Omega(t)$.

c) Si en un determinado instante $t_1 > 0$ se rompe el hilo, halle la ecuación de movimiento para el ángulo φ.

Ejercicio 4



Una esfera homogénea de masa m y radio r rueda sin deslizar en el interior de un cilindro fijo de eje vertical y sección circular de radio $a + r$.

a) Halle las ecuaciones de movimiento.

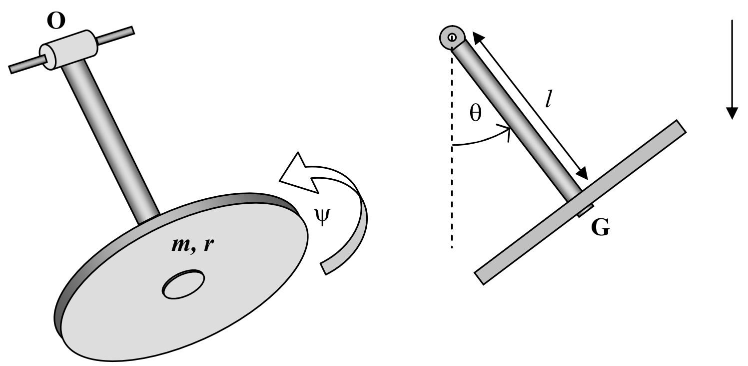
Sugerencia: Use las cardinales tomando como funciones incógnitas (z, φ) de coordenadas cilíndricas y la componente ω_r de $\vec{\omega}$ según **GC**, donde **G** es el centro de la esfera y **C** es el punto de contacto de la esfera con el cilindro.

b) En el instante inicial la esfera se encuentra con velocidad horizontal $\vec{v}_0$ en su centro y con velocidad angular $\vec{\omega}_0$ vertical. Demuestre que el centro de la esfera sigue un movimiento sinusoidal sobre el cilindro en la dirección del eje z y circular uniforme según el plano horizontal. Halle la diferencia entre las alturas máxima y mínima del centro (amplitud de la oscilación).

Ejercicio 5

Un disco homogéneo de radio r y masa m está unido a una barra de longitud l y masa despreciable en el extremo **G** de ésta. La barra es perpendicular al plano del disco (ver figura). Al ángulo de giro del disco en torno a la barra se lo denomina ψ.

El disco está obligado a girar con velocidad angular $\dot{\psi} = \Omega$ constante en torno a la barra. En el otro extremo de la barra, **O**, una articulación cilíndrica lisa permite que el sistema mecánico gire según un eje fijo perpendicular a la barra y de modo que la barra permanece contenida en un mismo plano vertical durante todo el movimiento. Al ángulo entre la barra y la dirección vertical se lo denomina θ. Se sabe además que el movimiento es tal que cuando la barra se encuentra en posición horizontal, el centro de masa tiene velocidad nula.



a) Calcule el momento angular del disco respecto al extremo fijo **O** de la barra.

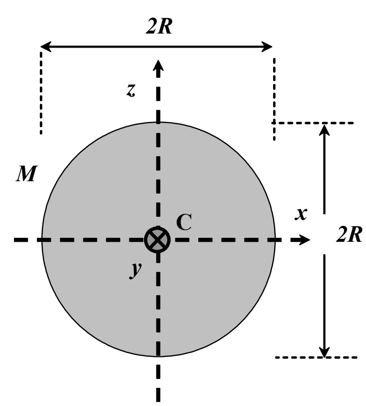
b) Encuentre la ecuación de movimiento que describe el movimiento de la barra.

c) Calcule la velocidad del centro de masa **G** en su posición más baja.

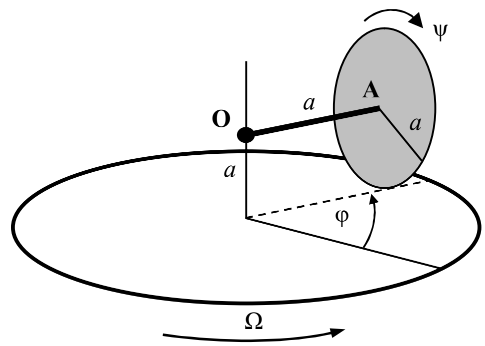
d) Determine el momento reactivo en el extremo fijo **O** de la barra cuando **G** está en su posición más baja.

Nota: Para un disco homogéneo de masa M y radio R, el tensor de inercia respecto a su centro en los ejes x, y, z de la figura es:

$$\begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{4} \end{pmatrix}$$



Ejercicio 6



Se considera un cuerpo rígido formado por un disco homogéneo de masa m, centro **A** y radio a, y una varilla **OA** de masa despreciable, largo a y perpendicular al disco. La varilla **OA** está unida en **O** a una recta vertical por medio de una articulación esférica lisa, situada a una altura a de un plano horizontal que gira respecto a un sistema inercial con velocidad angular constante Ω, alrededor de la vertical que pasa por **O**. Inicialmente el disco está en reposo, apoyado sobre el plano. El contacto entre el disco y el plano es rugoso, con coeficiente de rozamiento dinámico f.

a) Halle una expresión para el momento angular del disco respecto del punto **O**.

b) Sea φ el ángulo que forma **OA** con una horizontal fija al sistema inercial y ψ el ángulo de giro del disco alrededor de **OA** (ver figura). Muestre que dφ/dt y dψ/dt son proporcionales y halle una ecuación diferencial para la función φ(t), válida mientras el disco desliza sobre el plano.

c) Suponiendo que el disco siempre desliza sobre el plano, encuentre una expresión para la función $u(\varphi) = (d\varphi/dt)^2$.

d) Halle la condición que debe cumplir **Ω** para que siempre haya deslizamiento.

Resultados

Movimiento plano

Ejercicio 1 $\ddot{x} = \dfrac{4mg}{3M + 8m}$

Ejercicio 2 a) $\dfrac{2\mathrm{v}_0}{7fg}$. b) $\dfrac{12\mathrm{v}_0^2}{49fg}$. c) $\dfrac{5\mathrm{v}_0^2}{98\pi Rfg}$. d) $\dfrac{5}{7}\mathrm{v}_0$.

Ejercicio 3 a) $x(t) = \dfrac{2g}{5\omega_0^2}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$.

b) $T = \dfrac{1}{5}Mg\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$. $N = \dfrac{9}{5}M\cos(\omega_0 t) - Mr\omega_0^2$.

La condición de no desprendimiento inicial es $\omega_0^2 < \dfrac{9g}{5r}$.

c) $\mathrm{M} = 2Mx\dot{x}\omega_0 - Mrx\omega_0^2 + (\dfrac{1}{2}mgl + Mgx)\,cos(\omega_0 t)$.

Ejercicio 4 a) $\ddot{\theta}(\dfrac{7}{2} + 2\cos\theta) - \dot{\theta}^2\sin\theta - \dfrac{g}{r}\sin\theta = 0$. b) $f \geq 1/3$. c) $\dot{\theta}^2 < \dfrac{2g}{r}$

Ejercicio 5 a) 1) $\dfrac{3}{2}(R - r)\ddot{\varphi} + g\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0$.

2) $T = \dfrac{1}{3}mg\,\mathrm{sen}\,\varphi$. $N = \dfrac{1}{3}mg(7\cos\varphi - 4) + m\dfrac{\mathrm{v}_0^2}{R - r}$.

b) $f_{min} = \dfrac{1}{3}\mathrm{tg}\,\varphi_0$.

Ejercicio 6 a) $\ddot{\varphi} - \dfrac{2g}{3a}\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0$. b) $\varphi_0 = \arg\cos\left(\dfrac{56 + \sqrt{136}}{100}\right) \approx 47.4^\circ$.

c) $\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 = \dfrac{g}{a}(\mathrm{sen}\,\varphi - \cos\varphi) = 0$, $\ddot{\varphi} + \dfrac{1}{8}\ddot{\theta} = \dfrac{g}{a}\,\mathrm{sen}\,\varphi$.

d) $e^{2\varphi_d} \approx 3\cos\varphi_d + 6sen\varphi_d \Rightarrow \varphi_d \approx 54.1^\circ$.

Ejercicio 7 a) $\vec{R} = -Kmy_G\vec{\mathrm{j}}$. $\vec{M}_G = -\dfrac{1}{3}Kma^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\vec{\mathrm{k}}$.

b) $\ddot{x}_G = 0$, $\ddot{y}_G + Ky_G = 0$, $\ddot{\varphi} + Ksen\varphi\cos\varphi = 0$.

c) $dW = R_y dy_G + M_{Gz}d\varphi = -dU$, luego: $U = \dfrac{1}{2}Kmy_G^2 + \dfrac{1}{6}Kma^2sen^2\varphi + U_0$.

d) $y_G = 0,\ \varphi = 0$ (estable). $y_G = 0,\ \varphi = \pi/2$ (inestable).

Movimiento en el espacio

Ejercicio 1

a) $\vec{R} = mg\hat{J}$, $\vec{M} = -\frac{1}{4}mr^2\omega^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\,\hat{j}$.

b) $F_A = \frac{1}{2}mg\hat{J} + \frac{1}{8a}mr^2\omega^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\,\hat{u}$, $F_B = \frac{1}{2}mg\hat{J} - \frac{1}{8a}mr^2\omega^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\,\hat{u}$

($\hat{J}$ versor fijo vertical, $\hat{j}$ solidario al disco en su plano, $\hat{K}$ paralelo a **AB** y $\hat{u}$ es tal que: $\hat{K} \wedge \hat{u} = \hat{j}$).

Ejercicio 2

$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \pi,\ \cos\alpha_3 = \frac{g}{2h\omega^2}$

Ejercicio 3

a) $\Omega_0 > \sqrt{\frac{3g}{4l\cos\varphi_0}}$ b) $M = \frac{4ml^2}{3}\alpha \operatorname{sen}^2\varphi_0$ c) $\ddot{\phi} - \Omega^2 \operatorname{sen}\phi\cos\phi = -\frac{3}{4}\frac{g}{l}\operatorname{sen}\phi$

Ejercicio 4

a) $\dot{\omega}_r - \frac{\dot{z}\dot{\varphi}}{r} = 0$, $\frac{7}{5}\ddot{z} + \frac{2}{5}r\omega_r\dot{\varphi} = -g$, $\ddot{\varphi} = 0$.

b) $h = \frac{5a^2 g}{v_0^2}$.

Ejercicio 5

a) $\vec{\mathbf{L}}_O = \left(\frac{1}{4}MR^2 + Ml^2\right)\dot{\theta}\,\hat{I} + \frac{1}{2}MR^2\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\,\hat{J} - \frac{1}{2}MR^2\dot{\psi}\cos\theta\,\hat{K}$

b) $\left(\frac{1}{4}MR^2 + Ml^2\right)\ddot{\theta} = -Mgl\operatorname{sen}\theta$ c) $v_G = l\sqrt{\frac{8gl}{R^2+8l^2}}$,

d) $\vec{M}_o^r = \frac{1}{2}MR^2\Omega\cos\theta\sqrt{\frac{8gl}{R^2+8l^2}}\,\hat{J}$

Ejercicio 6

a) $\vec{\mathbf{L}}_O = \frac{ma^2}{4}\left(-2\dot{\psi}\,\hat{e}_r + 5\dot{\phi}\,\hat{k}\right)$ b) $\ddot{\phi} + f\dot{\phi}^2 = \frac{4fg}{5a}$

c) $u' + 2fu = \frac{8fg}{5a}$ d) $\Omega > 7\sqrt{\frac{g}{5a}}$

($\hat{k}$ es vertical y $\hat{e}_r$ paralelo a **OA**)