Mecánica clásica

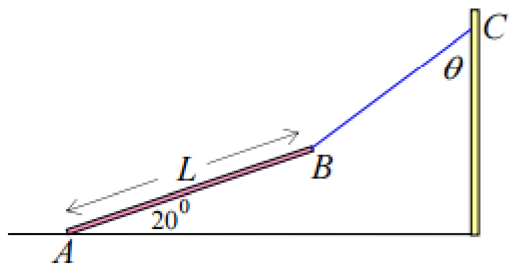
Examen - 9/2/2017

Ejercicio 1

Una varilla uniforme de masa m = 2.3 kg y longitud L se mantiene en posición inclinada respecto al piso mediante un cable que conecta un extremo de ella (punto B) a un punto C de una pared perpendicular al piso como indica la figura. El coeficiente de rozamiento estático entre la varilla y el piso vale $\mu_s = 0.6$. La varilla está a punto de deslizar hacia la derecha. Hallar:

a) La tensión en el alambre de soporte BC.

b) El ángulo θ que forma el alambre BC con la pared vertical.



Ejercicio 2

El sistema de la figura consiste de una barra sin masa de longitud $2l$ y un disco de masa m y radio r, el cual está unido en su centro de masas O al punto medio de la barra a través de una articulación cilíndrica lisa, cuyo eje tiene la dirección de la barra.

Uno de los extremos de la barra está unido a un punto A fijo por medio de una articulación esférica lisa. El otro extremo está unido a un eje vertical que pasa por A mediante un hilo inextensible sin masa, de modo que el ángulo θ_0 indicado es constante.

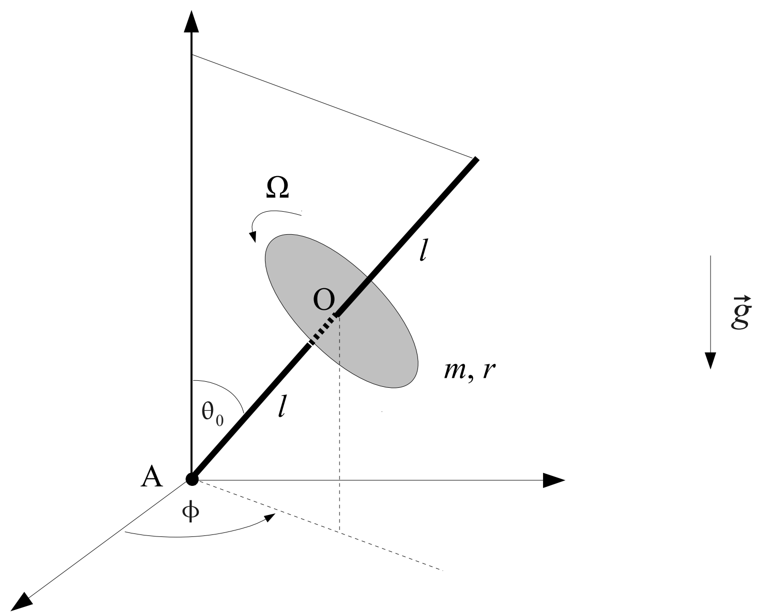
El disco gira con velocidad angular Ω constante en torno a la barra, con el sentido que se indica. El movimiento del sistema es con $\dot{\phi}=\dot{\phi}_0=\text{cte}$, siendo ϕ el ángulo de giro del plano vertical que contiene a la barra en torno al eje vertical por A.

Suponiendo que el hilo permanece tenso:

a) Halle el momento angular del sistema respecto al punto A.

b) Determine la tensión en el hilo.

c) ¿Qué condición debe cumplir Ω para que el hilo permanezca efectivamente tenso?



Nota

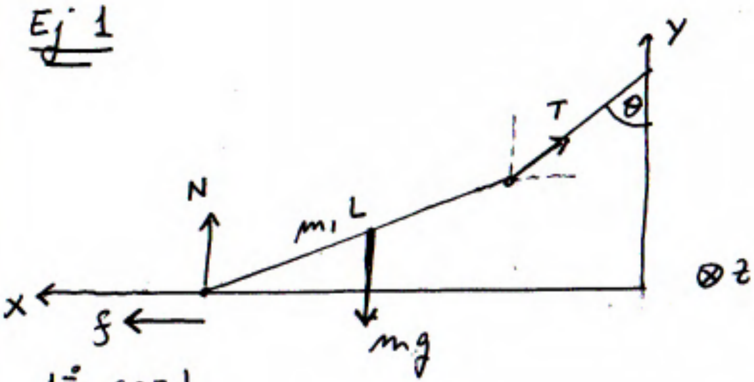
Momentos de inercia respecto al centro de masas:

Disco de radio r : $I_G=\frac{1}{2}mr^2$. Barra de largo $2l$: $I_G=\frac{1}{3}ml^2$

Derivadas de los versores del sistema esférico:

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt}=\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta+\phi\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_\phi \qquad \frac{d\hat{e}_\theta}{dt}=-\dot{\theta}\,\hat{e}_r+\phi\cos\theta\,\hat{e}_\phi$$

Ej 1



1° card

x) $f - T \operatorname{sen}\theta = 0$

y) $N - mg + T\cos\theta = 0$

$f = \mu N$ (a punto de deslizar)

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu N = T \operatorname{sen}\theta \\ mg - N = T\cos\theta \end{cases}$$

2° card. en B

z) $NL\cos\alpha - mg\frac{L}{2}\cos\alpha + fL\operatorname{sen}\alpha = 0$

$$N(\cos\alpha + \mu\operatorname{sen}\alpha) = \frac{mg}{2}\cos\alpha$$

$$tg\,\theta = \frac{\mu N}{mg - N} = \frac{\mu}{\frac{mg}{N} - 1} = \frac{\mu}{\frac{2(\cos\alpha + \mu\operatorname{sen}\alpha)}{\cos\alpha} - 1} = \frac{\mu\cos\alpha}{\cos\alpha + 2\mu\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\Rightarrow tg\,\theta = \frac{\mu}{1 + 2\mu\, tg\,\alpha}$$

$$\theta \simeq 22{,}67^\circ$$

$$T = \frac{f}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\mu N}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$N = \frac{mg}{2}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\operatorname{sen}\alpha} = 9{,}25\ N$$

$$T = 14{,}4\ N$$

$\therefore$

a) $T \simeq 14{,}4\ N$

b) $\theta = 22{,}67^\circ$

Ej 2

a $\vec{\omega} = \Omega\,\hat{e}_r + \dot{\phi}_0\,\hat{k} = \Omega\,\hat{e}_r + \dot{\phi}_0\,(\cos\theta_0\,\hat{e}_r - \operatorname{sen}\theta_0\,\hat{e}_\theta)$

$$\vec{\omega} = (\Omega + \dot{\phi}_0\cos\theta_0)\,\hat{e}_r - \dot{\phi}_0\operatorname{sen}\theta_0\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{L}_0 = \mathbb{I}_0\,\vec{\omega}$$

$$\vec{L}_0 = m r^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}}_{\{\hat{e}_r,\,\hat{e}_\theta,\,\hat{e}_\phi\}} \begin{bmatrix} \Omega + \dot{\phi}_0\cos\theta_0 \\ -\dot{\phi}_0\operatorname{sen}\theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} m r^2 (\Omega + \dot{\phi}_0\cos\theta_0)\,\hat{e}_r - \frac{1}{4} m r^2 \dot{\phi}_0 \operatorname{sen}\theta_0\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{L}_A = \vec{L}_0 + \vec{P}\times(\vec{r}_A - \vec{r}_0)$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{P} &= m\,\vec{v}_0 = m\,l\operatorname{sen}\theta_0\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi \\ \vec{r}_A - \vec{r}_0 &= -l\,\hat{e}_r \end{aligned}\right| \rightarrow \vec{P}\times(\vec{r}_A - \vec{r}_0) = -m\,l^2\dot{\phi}_0\operatorname{sen}\theta_0\,\hat{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{L}_A = \frac{1}{2} m r^2 (\Omega + \dot{\phi}_0\cos\theta_0)\,\hat{e}_r - m\left(\frac{r^2}{4} + l^2\right)\dot{\phi}_0\operatorname{sen}\theta_0\,\hat{e}_\theta$$

b 2° card en A:

$$\dot{\vec{L}}_A = \vec{M}_A$$

$$\left|\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_A &= \frac{m r^2}{2}(\Omega + \dot{\phi}_0\cos\theta_0)\,\dot{\phi}_0\operatorname{sen}\theta_0\,\hat{e}_\phi - m\left(\frac{r^2}{4} + l^2\right)\dot{\phi}_0^2\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0\,\hat{e}_\phi \\ \vec{M}_A &= -T\,2l\cos\theta_0\,\hat{e}_\phi + m g\,l\operatorname{sen}\theta_0\,\hat{e}_\phi \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow 2l\cos\theta_0\,T = m g l\operatorname{sen}\theta_0 - \frac{m r^2}{2}(\Omega + \dot{\phi}_0\cos\theta_0)\dot{\phi}_0\operatorname{sen}\theta_0 + m\left(\frac{r^2}{4} + l^2\right)\dot{\phi}_0^2\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0$$

$$= m g l\operatorname{sen}\theta_0 - \frac{m r^2}{2}\Omega\dot{\phi}_0\operatorname{sen}\theta_0 + m\dot{\phi}_0^2\left(l^2 - \frac{r^2}{4}\right)\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0$$

$$T = m\left(\frac{g}{2} - \frac{r^2\Omega\dot{\phi}_0}{4l}\right)\frac{\operatorname{sen}\theta_0}{\cos\theta_0} + \frac{m}{2l}\left(l^2 - \frac{r^2}{4}\right)\operatorname{sen}\theta_0\,\dot{\phi}_0^2$$

c $T > 0 \leftrightarrow g > \dfrac{r^2\Omega\dot{\phi}_0}{2l} + \left(\dfrac{r^2}{4} - l^2\right)\dfrac{\dot{\phi}_0^2\cos\theta_0}{l}$