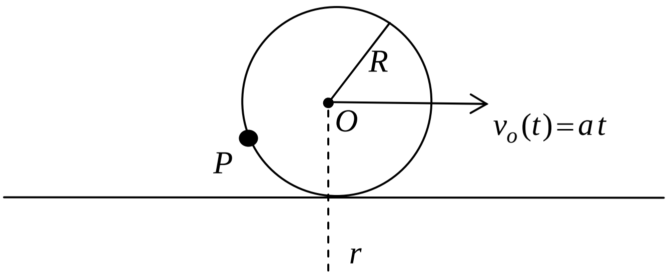
Mecánica clásica – Curso 2008

Primer parcial - 26/5/2008

Ejercicio 1

Un aro de radio *R* se mueve rodando sin deslizar sobre una superficie, de modo que la velocidad de su centro vale $v_o(t)=a\,t$, con *a* constante. Sobre el aro se desliza una partícula *P* de masa *m* con una velocidad relativa impuesta de módulo constante. No hay peso.



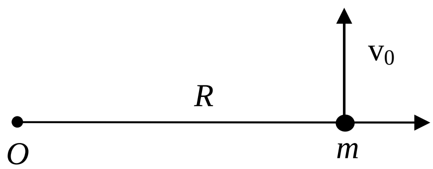
a) Encuentre la velocidad angular del sistema solidario al aro.

b) *i*) Si en *t = 0* la partícula se halla en el punto *I* del aro que está tocando a la superficie, escriba la expresión para el ángulo que forma *OP* con la recta *r* perpendicular a la superficie, en términos del ángulo ϕ entre *OP* y *OI* y los demás parámetros. *ii*) Calcule el tiempo que demora la partícula en llegar al punto más alto del aro.

c) Halle las fuerzas que deben actuar sobre *P*.

Ejercicio 2

Una partícula de masa *m* se mueve en un campo de fuerzas centrales dirigido a un punto *O*, que tiene la forma:



$$\vec{F}(\vec{r})=-\frac{k_1}{r^2}\hat{e}_r-\frac{k_2}{r^3}\hat{e}_r\ ,\quad \text{con}\quad k_1,k_2>0$$

La partícula parte con velocidad v_0 perpendicular al eje *Ox* del dibujo (que puede ser tomado como origen de los ángulos) y a una distancia *R* de *O*.

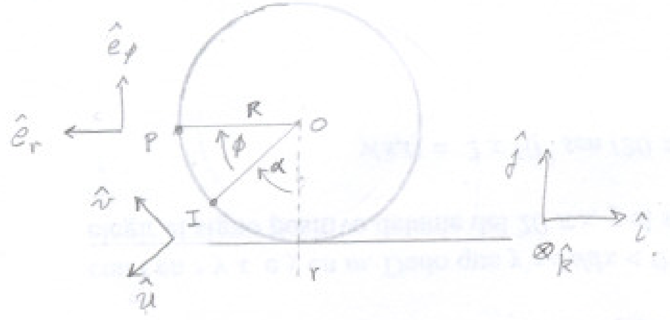
a) Si $v_0^2>\frac{k_2}{mR^2}$, bosqueje el potencial efectivo visto por la partícula.

b) Determine la ecuación polar de la trayectoria de la partícula: $r=r(\theta)$.

c) Halle la separación angular entre dos máximos consecutivos de *r* y determine la condición que deben verificar los parámetros para que la órbita sea cerrada.

1er PARCIAL 2008 — SOLUCIÓN —

Ej 1



a) S' SOLIDARIO AL ARO, PARA EL PUNTO C EN CONTACTO CON LA SUP.:

$$\underset{0}{\vec{v}_c} = \vec{v}'_c + \underset{0}{\vec{v}_o} + \vec{\omega}\wedge(C-O) = (at)\hat{\imath} + \omega\hat{k}\wedge(-R\hat{j})$$

$$\Rightarrow \vec{0} = (at)\hat{\imath} - \omega R\hat{\imath} \qquad \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \frac{at}{R}\hat{k}}$$

b i) $\theta = (OP, r) \qquad \Rightarrow \theta = \alpha + \phi \qquad , \dot{\phi} = CTE$ (LETRA) $\Rightarrow \phi(t) = \dot{\phi}_o t$

$\alpha = (OI, r)$

$\qquad$ ES $\omega = \dot{\alpha} = \dfrac{at}{R} \qquad \Rightarrow \alpha(t) = \dfrac{at^2}{2R}$

$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{at^2}{2R} + \dot{\phi}_o t$$

ii) $\theta(t_1) = \dfrac{at_1^2}{2R} + \dot{\phi}_o t_1 = \pi \longrightarrow t_1^2 + \dfrac{2R\dot{\phi}_o}{a} t_1 - \dfrac{2\pi R}{a} = 0$

$$t_1 = \frac{1}{2}\left[-\frac{2R\dot{\phi}_o}{a} \pm \sqrt{\frac{4R^2\dot{\phi}_o^2}{a^2} + 4\,\frac{2\pi R}{a}}\,\right] = \sqrt{\frac{R^2\dot{\phi}_o^2}{a^2} + \frac{2\pi R}{a}} - \frac{R\dot{\phi}_o}{a}$$

c) EN $S'\{O, \hat{u}, \hat{v}, \hat{k}\}$: $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\phi$ VERSORES DE COORD. POLARES RELATIVAS A S' (ϕ MEDIDO A PARTIR DE OI, COMO EN b))

$$\vec{r}' = R\hat{e}_r \qquad \vec{v}' = R\dot{\phi}_o\hat{e}_\phi \qquad \vec{a}' = -R\dot{\phi}_o^2\hat{e}_r$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_c$$

$$\cdot\ \vec{a}_T = \vec{a}_o + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}') + \dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r}' = a\hat{\imath} - \left(\frac{at}{R}\right)^2 R\hat{e}_r + \frac{a}{R}R\hat{e}_\phi$$

$$= a\hat{\imath} - \frac{a^2t^2}{R}\hat{e}_r + a\hat{e}_\phi$$

$$\cdot\ \vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}' = -2\frac{at}{R}R\dot{\phi}_o\hat{e}_r = -2a\dot{\phi}_o t\,\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \quad -mR\dot{\phi}_0^2\,\hat{e}_r = \vec{F} - ma\hat{\imath} + m\frac{a^2t^2}{R}\hat{e}_r - ma\,\hat{e}_\phi + 2ma\dot{\phi}_0 t\,\hat{e}_r$$

$$\hat{e}_r) \quad F_r = ma\,\hat{\imath}\cdot\hat{e}_r - mR\dot{\phi}_0^2 - m\frac{a^2t^2}{R} - 2ma\dot{\phi}_0 t$$

$$\hat{e}_\phi) \quad F_\phi = ma\,\hat{\imath}\cdot\hat{e}_\phi + ma$$

$$\hat{\imath}\cdot\hat{e}_r = -\operatorname{sen}(\alpha+\phi)$$

$$\hat{\imath}\cdot\hat{e}_\phi = -\cos(\alpha+\phi)$$

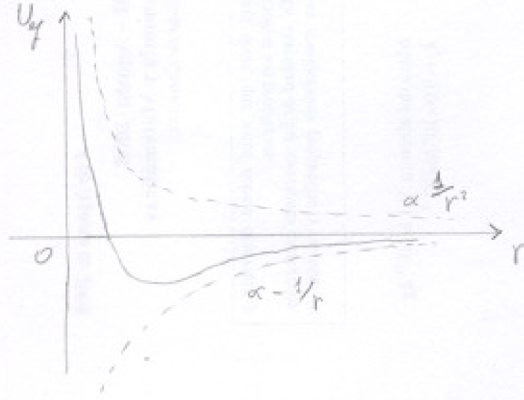
Ej 2

$$\vec{F}(r) = -\left(\frac{k_1}{r^2} + \frac{k_2}{r^3}\right)\hat{e}_r$$

a

$$U(r) = -\left(\frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{2r^2}\right) \qquad \Rightarrow U_{ef}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r) = -\frac{k_1}{r} + \frac{m^2R^2v_0^2}{2mr^2} - \frac{k_2}{2r^2}$$

$$\ell = mRv_0 \qquad\qquad = \frac{mR^2v_0^2 - k}{2r^2} - \frac{k_1}{r}$$



b

$$u'' + u = -\frac{m}{\ell^2}\frac{F[u]}{u^2} = -\frac{1}{mR^2v_0^2}\frac{(-k_1u^2 - k_2u^3)}{u^2} = +\frac{k_1}{mR^2v_0^2} + \frac{k_2}{mR^2v_0^2}u$$

$$\Rightarrow u'' + \left(1 - \frac{k_2}{mR^2v_0^2}\right)u = \frac{k_1}{mR^2v_0^2}$$

SEA: $\begin{cases} W^2 = 1 - \dfrac{k_2}{mR^2v_0^2} \quad (>0) \\ \dfrac{1}{P} = \dfrac{k_1}{mR^2v_0^2} \end{cases}$

$$\begin{cases} u_{GH} = A\cos W\theta + B\,\mathrm{Sen}\,W\theta \\ u_{PHH} = \dfrac{1}{W^2P} \end{cases}$$

CI:

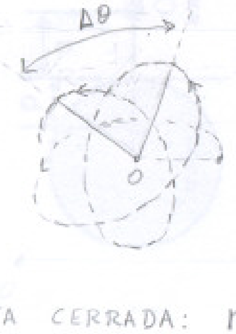
$$u(0) = A + \frac{1}{W^2P} = 1/R$$

$$u'(0) = WB = -\frac{m}{\ell}\dot{r}(0) = 0$$

$$\Rightarrow u(\theta) = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{W^2P}\right)\mathrm{Sen}\,W\theta + \frac{1}{W^2P}$$

$$\Rightarrow r(\theta) = \frac{1}{(1/R - 1/W^2P)\,\mathrm{Sen}\,W\theta + 1/W^2P}$$

c



$W \neq 1 \Rightarrow r(\theta)$ TIENE PERÍODO $Q = \frac{2\pi}{W}$ EN θ

1) $\boxed{\Delta\theta = \frac{Q}{2} = \frac{\pi}{W}}$ DISTANCIA ANGULAR ENTRE MÁXIMOS

2) ÓRBITA CERRADA: $r(0) = r(2\pi)$

$$\Rightarrow \mathrm{Sen}\,W0 = \mathrm{Sen}\,W2\pi = 0 \iff 2\pi W = n\pi \Rightarrow \boxed{W = \frac{n}{2}}$$

$n = 1, 2, 3 \ldots$