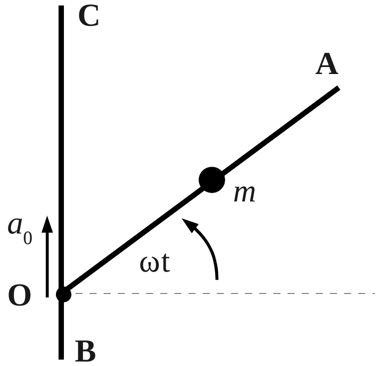
Mecánica clásica – Curso 2010

Primer parcial - 12/5/2010

Ejercicio 1

Una partícula de masa m se mueve sin rozamiento sobre la guía rectilínea **OA**. El extremo **O** de la guía recorre una recta **BC** con aceleración constante a_0, además la guía gira en torno a un eje que pasa por **O** y es perpendicular al plano que determinan la guía y la recta **BC**, con velocidad angular ω constante.



Inicialmente **O** está quieto, la partícula está en **O** con velocidad v_0 y la guía es perpendicular a la recta **BC**.

a) Halle la ecuación de movimiento de m.

b) Halle la ley horaria.

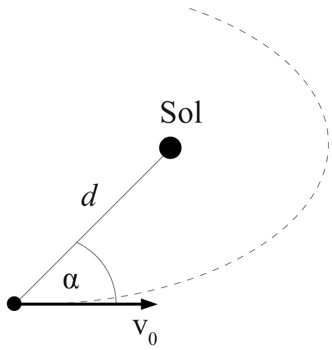
c) Determine la normal que ejerce el tubo sobre la partícula en función del tiempo.

d) Determine la variación de energía cinética de la partícula en el sistema absoluto entre $t = 0$ y un instante arbitrario t.

Ejercicio 2

Un cometa de masa m se encuentra a una distancia d del Sol con velocidad v_0 que forma un ángulo α con el radio vector medido desde el Sol. Se supondrá que se cumple: $m << M_{Sol}$, de modo que el Sol permanecerá fijo en un sistema inercial durante todo el ejercicio.

a) Determine la condición que debe cumplir v_0 para que el cometa se vaya y no vuelva nunca más.



Si $\alpha = 45°$ y $v_0^2 = \dfrac{4\gamma}{md}$:

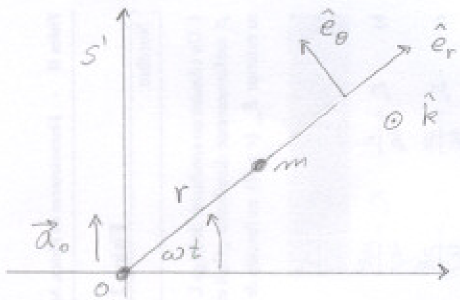
b) Encuentre la ecuación de la trayectoria que sigue el cometa ($r(\theta)$).

Sugerencia: tome como origen de ángulos el radio vector inicial.

c) Halle la mínima distancia a la que se el cometa encontrará del Sol y la velocidad en ese instante.

Nota: La fuerza gravitatoria sobre el cometa puede escribirse como: $\vec{F}(r) = -\dfrac{\gamma}{r^2}\hat{e}_r$

Ej 1



S' → SISTEMA RELATIVO QUE ACOMPAÑA A O

$\vec{r}\,' = r\hat{e}_r \qquad \vec{v}\,' = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\omega\,\hat{e}_\theta$

$\vec{a}\,' = (\ddot{r} - r\omega^2)\,\hat{e}_r + 2\dot{r}\omega\,\hat{e}_\theta$

$[\theta = \omega t \Rightarrow \dot{\theta} = \omega \quad \ddot{\theta} = 0]$

a) EN S': $m\vec{a}\,' = N\hat{e}_\theta - m\vec{a}_T - m\vec{a}_c$

$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\,' = 0 \quad (\vec{\Omega} = 0,\ S' \text{ NO ROTA})$

$\vec{a}_T = \vec{a}_0 + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}\,') + \dot{\vec{\Omega}}\wedge\vec{r}\,' = a_0\hat{j}$

$\Rightarrow \quad m\vec{a}\,' = N\hat{e}_\theta - ma_0\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \hat{e}_r)\ m(\ddot{r} - r\omega^2) = +ma_0 \operatorname{sen}\omega t$

$\hat{e}_\theta)\ m2\dot{r}\omega = N + ma_0\cos\omega t$

b) H) $\ddot{r} = r\omega^2 \Rightarrow r(t) = A\operatorname{senh}(\omega t) + B\cosh(\omega t)$

NH) $r_p(t) = C\operatorname{sen}\omega t \Rightarrow m(-\omega^2 C - \omega^2 C)\operatorname{sen}\omega t = ma_0\operatorname{sen}\omega t \Rightarrow C = -\dfrac{a_0}{2\omega^2}$

$\Rightarrow r(t) = A\operatorname{senh}(\omega t) + B\cosh(\omega t) - \dfrac{a_0}{2\omega^2}\operatorname{sen}(\omega t)$

CI: $r(0) = B = 0$

$\dot{r}(0) = \omega A - \dfrac{a_0}{2\omega} = v_0$

$\Rightarrow r(t) = \dfrac{a_0 + 2\omega v_0}{2\omega^2}\operatorname{senh}(\omega t) - \dfrac{a_0}{2\omega^2}\operatorname{sen}(\omega t)$

c) $N = 2m\omega\dot{r} - ma_0\cos\omega t = m(a_0 + 2\omega v_0)\cosh(\omega t) - 2ma_0\cos(\omega t)$

d) $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0 + \cancel{\vec{\Omega}}^{\,0}\wedge\vec{r}\,' = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\omega\,\hat{e}_\theta + a_0 t\,\hat{j}$

$= (\dot{r} + a_0 t\operatorname{sen}\omega t)\,\hat{e}_r + (r\omega + a_0 t\cos\omega t)\,\hat{e}_\theta$

$\vec{v}(0) = \dot{r}(0)\,\hat{e}_r(0) = v_0\,\hat{i}$

$\Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}m\left[v^2(t) - v_0^2\right]$

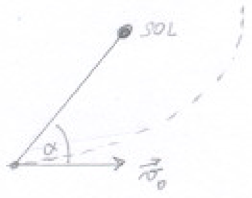
$v(t)$ SE OBTIENE DE $r(t)$ YA HALLADO

Ej 2

$\vec{L} = m (d\,\hat{e}_r) \wedge \vec{v}_0 = m\, d\, v_0 \operatorname{sen}\alpha\ \hat{k}$

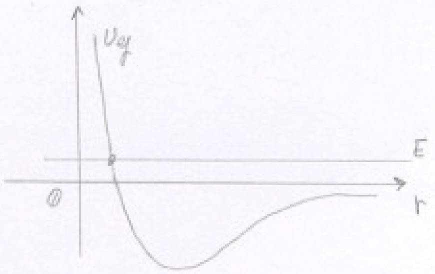
$\ell^2 = m^2 d^2 v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha$

$\dot{r}(0) = -v_0 \cos\alpha \quad , \qquad r(0) = d$



a

$\vec{F} = -\frac{\gamma}{r^2}\hat{e}_r \Rightarrow U(r) = -\frac{\gamma}{r} \Rightarrow E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\gamma}{d}$



ÓRBITA ABIERTA $\Leftrightarrow$ $E \geqslant 0$

$\Rightarrow \boxed{v_0^2 \geqslant \frac{2\gamma}{md}}$

b

$u'' + u = -\frac{m}{\ell^2}\frac{F[u]}{u^2} = \frac{m\gamma}{\ell^2}$ SEA $\frac{m\gamma}{\ell^2} = \frac{\gamma}{m d^2 v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{P}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{H)}\ u'' + u = 0 \Rightarrow u_H(\theta) = A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta \\ \text{NH)}\ u_{P_{NH}} = \frac{1}{P} \end{array}\right\} \Rightarrow u(\theta) = A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{P}$$

C.I.:
$$\left\{\begin{array}{l} u(0) = A + \frac{1}{P} = \frac{1}{d} \Rightarrow A = \frac{1}{d} - \frac{1}{P} \\ u'(0) = B = -\frac{m}{\ell}\dot{r}(0) = -\frac{m}{m v_0 d \operatorname{sen}\alpha}(-v_0\cos\alpha) = +\frac{1}{d\operatorname{tg}\alpha} \end{array}\right.$$

$\alpha = 45^\circ$

$v_0^2 = \frac{4\gamma}{md} \Rightarrow \frac{1}{P} = \frac{\gamma\, md}{md^2\, 4\gamma\, \operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{2d} \Rightarrow A = \frac{1}{2d}$

$B = \frac{1}{d}$

$\Rightarrow u(\theta) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\right)$

$\rightarrow r(\theta) = \frac{d}{\frac{1}{2}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}}$

c

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{4\gamma}{md}\right) - \frac{\gamma}{d} = \frac{2\gamma}{d} - \frac{\gamma}{d} = \frac{\gamma}{d}$$

$$U_{ef}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\gamma}{r} = \frac{\cancel{m^2} d^2 (4\gamma/\cancel{m}d) \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cancel{m} r^2} - \frac{\gamma}{r} = \frac{4d\gamma}{r^2} - \frac{\gamma}{r}$$

MÍNIMA DISTANCIA R / $U_{ef}(R) = E \Rightarrow \frac{4d\gamma}{R^2} - \frac{\gamma}{R} = \frac{\gamma}{d}$

$$\rightarrow R^2 + dR - 4d^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{2}\left[-d \pm \sqrt{d^2 + 16d^2}\right] = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} d$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{\gamma}{R} = E = \frac{\gamma}{d} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2\gamma}{m}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{d}\right]$$