Mecánica clásica – Curso 2011

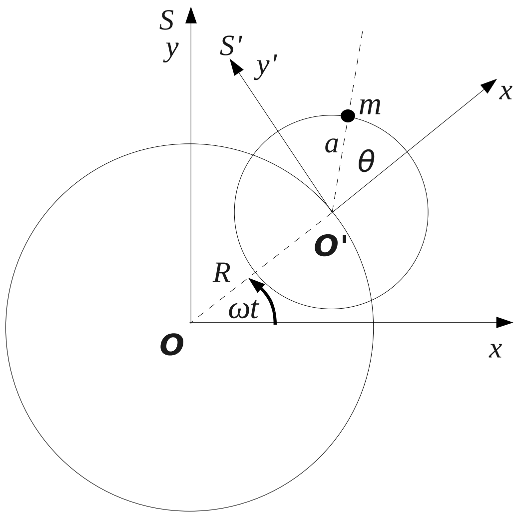
Primer parcial - 19/5/2011

Ejercicio 1

El origen **O'** de un sistema de referencia S' se mueve sobre una circunferencia de radio R y centro **O**, fija en un sistema de referencia S inercial. El ángulo que forma el radio **OO'** con **O**x es ωt, con ω constante. El eje **O'**x' en S' siempre tiene la dirección del radio **OO'**.

Fija a S' se encuentra una guía circular de radio a y centro **O'** sobre la cual se mueve una partícula de masa m, cuya posición en S' está determinada por el ángulo θ de coordenadas polares en S'.

Sobre m actúa (además de la fuerza de vínculo con la guía) una fuerza externa dependiente de la posición $T(\theta)$, dirigida según la tangente a la guía, tal que el movimiento es con $\dot{\theta}=\dot{\theta}_0=$ constante.



a) Halle los valores posibles de θ en el instante en que la velocidad de m en S es nula. ¿Hay alguna restricción en los parámetros del problema para que esto sea posible?

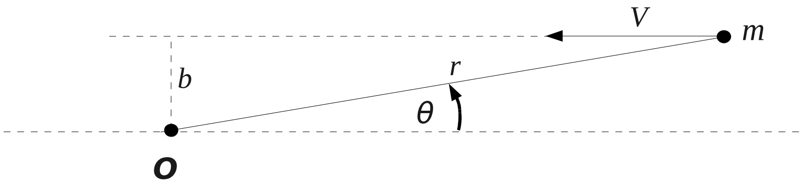
b) Determine el valor de las fuerzas que actúan sobre m en términos del ángulo θ.

c) Muestre que la energía de m no se conserva en S, calculando explícitamente $\frac{dE}{dt}$.

Ejercicio 2

Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de una fuerza atractiva, dirigida hacia un punto ***O*** fijo, dada por: $\vec{F}(r)=-\frac{m\gamma^2}{r^3}\hat{e}_r$, siendo γ una constante positiva.

Inicialmente m es lanzada desde una gran distancia, acercándose a ***O*** con velocidad V según una dirección cuya distancia perpendicular a ***O*** es b.



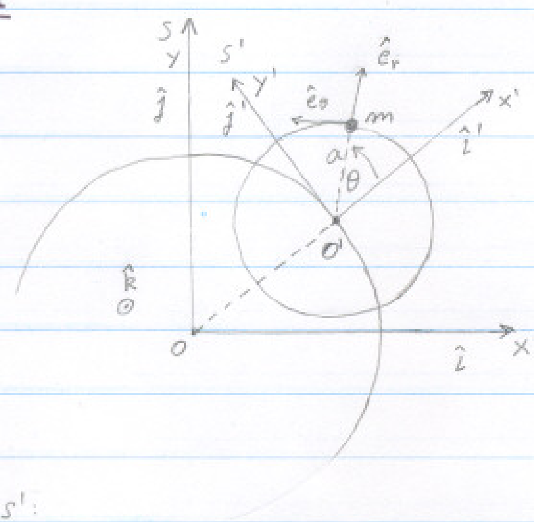
a) Obtenga la ecuación de la trayectoria $r(\theta)$ suponiendo que $b^2V^2>\gamma^2$.

b) Para el caso en que $V=\frac{15\gamma}{\sqrt{209}b}$, halle el máximo acercamiento y la dirección en la que m se alejará de ***O***.

MECÁNICA CLÁSICA 2011

PRIMER PARCIAL - SOLUCIÓN -

Ej 1



$S\{O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ $\quad S'\{O', \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}\}$

$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ $\qquad S'$ RESPECTO A S

$$S') \begin{cases} \vec{r}\,' = a\,\hat{e}_r \\ \vec{v}\,' = a\,\dot{\theta}_0\,\hat{e}_\theta \\ \vec{a}\,' = -a\,\dot{\theta}_0^2\,\hat{e}_r \end{cases}$$

En S':

$$\begin{cases} \vec{a}_T = \vec{a}_{oo'} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,') + \cancelto{0}{\dot{\vec{\omega}}}\wedge\vec{r}\,' = -R\omega^2\hat{i}' - a\omega^2\hat{e}_r \\ \vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}\,' = -2a\omega\dot{\theta}_0\,\hat{e}_r \end{cases}$$

a) $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_{oo'} + \vec{\omega}\wedge\vec{r}\,' = a\dot{\theta}_0\hat{e}_\theta + R\omega\hat{j}' + a\omega\hat{e}_\theta$ $\quad \| \quad \hat{j}' = \operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_r + \cos\theta\,\hat{e}_\theta$

$$= R\omega\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_r + (a\dot{\theta}_0 + R\omega\cos\theta + a\omega)\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{v} = \vec{0} \iff \begin{cases} \operatorname{sen}\theta = 0 \longleftrightarrow \boxed{\theta = 0, \pi} \\ a(\dot{\theta}_0 + \omega) + R\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$\cos 0 = 1 \rightarrow a(\dot{\theta}_0 + \omega) = -R\omega \Rightarrow \underline{\dot{\theta}_0 = -\left(\frac{R}{a} + 1\right)\omega}$

$\cos\pi = -1 \rightarrow \underline{\dot{\theta}_0 = \left(\frac{R}{a} - 1\right)\omega}$

b) S'

$$m\vec{a}\,' = T\hat{e}_\theta + N\hat{e}_r - m\vec{a}_T - m\vec{a}_c$$

$\hat{e}_r)$ $-ma\dot{\theta}_0^2 = N + ma\omega^2 + mR\omega^2\cos\theta + 2ma\omega\dot{\theta}_0$

$$\rightarrow N = -m\left[a\dot{\theta}_0^2 + a\omega^2 + R\omega^2\cos\theta + 2a\omega\dot{\theta}_0\right]$$

$$\underline{N = -ma(\dot{\theta}_0 + \omega)^2 - mR\omega^2\cos\theta}$$

$\hat{e}_\theta)$ $0 = T + mR\omega^2\,\hat{i}'\cdot\hat{e}_\theta = T - mR\omega^2\operatorname{sen}\theta$

$$\rightarrow \underline{T = mR\omega^2\operatorname{sen}\theta}$$

c) En S:

$$\frac{dE}{dt} = P_N + P_T$$

$$\begin{cases} P_N = \vec{N} \cdot \vec{v} = -m\left[a(\dot{\theta}_0+\omega)^2 + R\omega^2\cos\theta\right] R\omega \,\text{sen}\,\theta \\ P_T = \vec{T} \cdot \vec{v} = mR\omega^2\,\text{sen}\,\theta\left[a(\dot{\theta}_0+\omega) + R\omega\cos\theta\right] \end{cases}$$

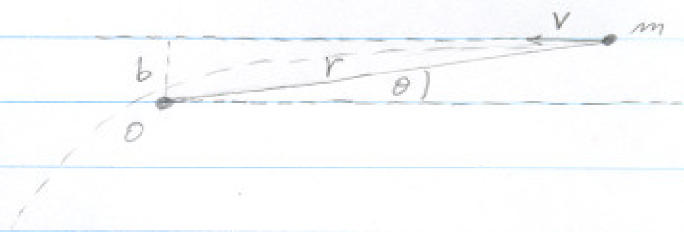
$$\frac{dE}{dt} = mRa\left[(\dot{\theta}_0+\omega)\omega^2 - (\dot{\theta}_0+\omega)^2\omega\right]\text{sen}\,\theta - \cancel{mR^2\omega^3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} + \cancel{mR^2\omega^3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}$$

$$= -mRa\left(\dot{\theta}_0^2\omega + \dot{\theta}_0\omega^2\right)\text{sen}\,\theta$$

$$\theta = \dot{\theta}_0 t \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = -mRa\,\dot{\theta}_0\,\omega\left(\dot{\theta}_0+\omega\right)\text{sen}(\dot{\theta}_0 t) \not\equiv 0$$

Ej 2

$$\vec{F} = -\frac{m\gamma^2}{r^3}\hat{e}_r$$



a) $\vec{L}_o = \vec{r} \wedge (m\vec{v}) = m r v \operatorname{sen}\theta \, \hat{k}$

INICIALMENTE $\begin{cases} \theta \simeq 0 & \text{con } r\operatorname{sen}\theta = b \Rightarrow \ell = mVb \\ r \simeq \infty \\ \vec{v} \simeq -V\hat{e}_r \end{cases}$

$$u'' + u = -\frac{m}{\ell^2}\frac{F(u)}{u^2}$$

$$\Rightarrow u'' + u = +\frac{m}{m^2V^2b^2}\cdot\frac{m\gamma^2u^3}{u^2} = \frac{\gamma^2}{b^2V^2}u$$

$$F(u) = -m\gamma^2u^3$$

$$u'' = -\left(1 - \frac{\gamma^2}{b^2V^2}\right)u$$

Sea $W^2 = 1 - \frac{\gamma^2}{b^2V^2}$, $W^2 > 0 \Rightarrow u'' = -W^2u$

$\therefore u(\theta) = A\cos W\theta + B\operatorname{sen}W\theta$

C. I.) $u(0) = 0 = A$

$u'(0) = -\frac{m}{\ell}\dot{r}(0) = -\frac{1}{bV}(-V) = \frac{1}{b} = WB$ $\Bigg\} \Rightarrow u(\theta) = \frac{1}{bW}\operatorname{sen}W\theta$

$$\boxed{r(\theta) = \frac{bW}{\operatorname{sen}W\theta}}$$

b) $V = \frac{15\gamma}{\sqrt{209}\,b} \Rightarrow W^2 = 1 - \frac{209b^2}{225\gamma^2}\cdot\frac{\gamma^2}{b^2} = \frac{225-209}{225} = \frac{16}{225} \therefore W = \frac{4}{15}$

- MÁXIMO ACERCAMIENTO: $\operatorname{sen}W\theta = 1 \Rightarrow r_{min} = bW = \frac{4}{15}b$
- $r = \infty \Leftrightarrow \operatorname{sen}W\theta = 0 \rightarrow \theta = 0$ (DIR. INICIAL)

$\hookrightarrow \theta = \frac{\pi}{W} = \frac{15}{4}\pi$ (DIR. DE ALEJAMIENTO)