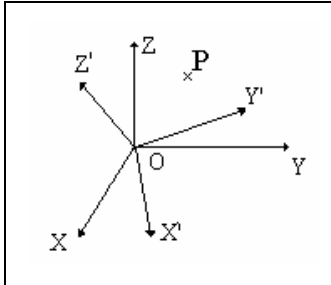


## ÁNGULOS DE EULER

Al estudiar como cambia ante una rotación de los ejes coordenados el tensor de inercia de un sólido rígido vimos que las rotaciones se describen por matrices ortogonales.



Si  $\vec{r} = (x,y,z)$  son las coordenadas de un punto respecto al sistema "fijo" y  $\vec{r}' = (x',y',z')$  las coordenadas respecto al sistema rotado

$$r_i = \sum_j \lambda_{ij} r'_j$$

$$r^2 = \sum_i \sum_j \lambda_{ij} r'_j \sum_k \lambda_{ik} r'_k = r'^2 = \sum_{jk} \delta_{jk} r'_j r'_k$$

es decir

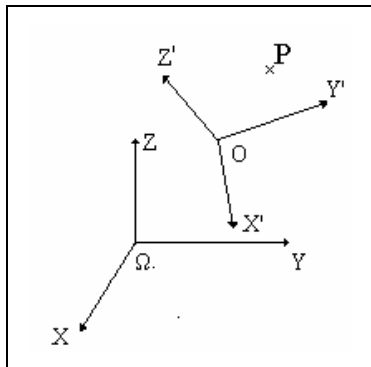
$$\sum_i \lambda_{ij} \lambda_{ik} = \delta_{jk}$$

$$\sum_j \lambda_{ji}^T \lambda_{ik} = \delta_{jk}$$

o sea que

$$\lambda^T \lambda = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \lambda^T = \lambda^{-1}$$

$$\lambda^T \lambda = \lambda \lambda^T = \mathbf{I}$$



En general las coordenadas respecto a un sistema trasladado y rotado estarán relacionadas con las coordenadas respecto al sistema original por

1)  $\vec{r}_p = \vec{r}_o + \lambda \vec{r}'_p$

Derivando respecto del tiempo

2)  $\vec{v}_p = \dot{\vec{r}}_p = \vec{v}_o + \lambda \dot{\vec{r}}'_p$

donde hemos usado que el sistema  $Ox'y'z'$  es solidario con el rígido. De la ecuación 1) resulta

$$\vec{r}' = \lambda^{-1}(\vec{r}_p - \vec{r}_o) = \lambda^T (\vec{r}_p - \vec{r}_o)$$

y por lo tanto

$$\vec{v}_p = \vec{v}_o + \lambda \lambda^T (\dot{\vec{r}}_p - \dot{\vec{r}}_o)$$

Definamos la matriz

$$\mathbf{T} = \lambda \lambda^T$$

entonces

$$\vec{v}_p = \vec{v}_o + \mathbf{T}(\dot{\vec{r}}_p - \dot{\vec{r}}_o)$$

Es fácil ver que T es antisimétrica

$$\lambda \lambda^T = \mathbf{I}$$

derivando respecto a t

$$\dot{\lambda} \lambda^T + \lambda \dot{\lambda}^T = 0$$

$$\dot{\lambda} \lambda^T = -\lambda \dot{\lambda}^T = -(\dot{\lambda} \lambda^T)^T$$

o sea

$$\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T$$

en componentes

$$T_{ij} = -T_{ji}$$

Si se escribe la matriz antisimétrica en componentes

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Y si se define  $\omega_1 = -T_{23}$  ;  $\omega_2 = -T_{31}$  ;  $\omega_3 = -T_{12}$  se puede ver que  $\mathbf{T}\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{v}$  donde  $\bar{v}$  es un vector cualquiera. En efecto

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ -\omega_2 v_1 + \omega_1 v_2 \end{pmatrix}$$

que son los componentes de  $\bar{\omega} \times \bar{v}$ , y se recupera la distribución de velocidades en un rígido.

$$\bar{v}_p = \bar{v}_o + \mathbf{T}(\bar{r}_p - \bar{r}_o) = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times (\bar{r}_p - \bar{r}_o)$$

La novedad es que hemos establecido una relación entre la velocidad angular  $\bar{\omega}$  del rígido y la transformación ortogonal  $\lambda$  que pasa del sistema fijo al sistema solidario con el rígido.

Vamos a ver que la matriz de rotación  $\lambda$  se puede expresar en términos de tres ángulos, llamados ángulos de Euler. En efecto se puede pasar de un sistema a otro cualquiera mediante tres rotaciones sucesivas. Primero se rota el sistema original un ángulo  $\varphi$  en sentido antihorario alrededor del eje Oz. Llamemos a los ejes resultantes  $O\xi\eta\zeta$ . Luego se hace rotar este nuevo sistema un ángulo  $\theta$  alrededor de  $O\xi$ , obteniéndose el sistema  $O\xi'\eta'\zeta'$ . El eje  $O\xi = O\xi'$  es la intersección de los planos xy con  $\xi'\eta'$  y se llama la línea de nodos. Finalmente se giran los ejes  $O\xi'\eta'\zeta'$  alrededor de  $\zeta'$  un ángulo  $\psi$  en sentido directo, obteniéndose el sistema  $Ox'y'z'$  que puede pensarse como solidario con el rígido. Los tres ángulos de Euler  $\varphi, \theta, \psi$  determinan la orientación de  $Ox'y'z'$  respecto de  $Oxyz$ .

Como hemos visto dado P de coordenadas  $x_0, y_0, z_0$  sus coordenadas respecto de  $O\xi\eta\zeta$  son

$$\bar{r}_{\xi\eta\zeta} = \mathbf{D}\bar{r}_{xyz}$$

$$\text{con } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{transformación ortogonal.}$$

Análogamente

$$\bar{r}_{\xi'\eta'\zeta'} = \mathbf{C}\bar{r}_{\xi\eta\zeta}$$

$$\text{con } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

y

$$\vec{r}_{x'y'z'} = \mathbf{B} \vec{r}_{\xi'\eta'\zeta'}$$

$$\text{con } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente las coordenadas en el sistema solidario  $\vec{r}' \equiv \vec{r}_{x'y'z'}$  están dadas respecto a las coordenadas en el sistema fijo  $\vec{r} \equiv \vec{r}_{xyz}$  por

$$\vec{r}' = \mathbf{BCD} \vec{r}$$

y la transformación inversa será

$$\vec{r} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \vec{r}'$$

Las correspondientes matrices serán

$$\lambda = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \text{sen } \varphi \text{sen } \psi & -\text{sen } \psi \cos \varphi - \cos \theta \text{sen } \varphi \cos \psi & \text{sen } \theta \text{sen } \varphi \\ \cos \psi \text{sen } \varphi + \cos \theta \cos \varphi \text{sen } \psi & -\text{sen } \psi \text{sen } \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\text{sen } \theta \cos \varphi \theta \\ \text{sen } \theta \text{sen } \psi & \text{sen } \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\lambda^T = \lambda^{-1}$$

La velocidad angular de  $Ox'y'z'$  respecto de  $Oxyz$  se puede calcular recordando que

$$\mathbf{T} = \lambda \lambda^T$$

es un tensor antisimétrico cuyas componentes dan  $\vec{\omega}$  o usando el teorema de adición de velocidades angulares que da el resultado en forma más sencilla ,

$$\vec{\omega} = \varphi \mathbf{e}_z + \theta \mathbf{e}_\xi + \psi \mathbf{e}_{\zeta'}$$

$\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_{\zeta'}$  son respectivamente los vectores unitarios en la dirección  $Oz, O\xi, \text{ y } O\zeta'$ . Vamos a expresar la velocidad angular en los ejes  $Oxyz$  y  $Ox'y'z'$ . Para ello expresemos

$$\mathbf{e}_\xi = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \text{sen } \varphi \mathbf{e}_y$$

y

$$\mathbf{e}_{\zeta'} = \text{sen } \varphi \text{sen } \theta \mathbf{e}_x + \cos \varphi \text{sen } \theta \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

Las componentes de  $\dot{e}_{z'}$  se pueden obtener a partir de  $\lambda$  observando que las coordenadas

de  $e_{z'} = e_z$  en el sistema solidario son  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y las coordenadas en el sistema fijo son

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi \\ -\text{sen } \theta \text{ cos } \varphi \\ \text{cos } \theta \end{pmatrix}$$

Se obtiene

$$\bar{\omega} = (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \dot{e}_z + (\dot{\theta} \text{ sen } \varphi - \dot{\psi} \text{ sen } \theta \cos \varphi) \dot{e}_y + (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi) \dot{e}_x$$

Por otro lado en los ejes solidarios

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \cos \psi \dot{e}_{x'} - \text{sen } \psi \dot{e}_{y'} \\ \dot{e}_z &= \text{sen } \psi \text{ sen } \theta \dot{e}_{x'} + \text{sen } \theta \cos \psi \dot{e}_{y'} + \text{cos } \theta \dot{e}_{z'} \end{aligned}$$

que se obtiene mirando  $\lambda^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Por lo tanto

$$\bar{\omega} = (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \dot{e}_{z'} + (-\dot{\theta} \text{ sen } \psi + \dot{\varphi} \text{ sen } \theta \cos \psi) \dot{e}_{y'} + (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \text{ sen } \theta \text{ sen } \psi) \dot{e}_{x'}$$

que son las componentes de  $\bar{\omega}$  en los ejes solidarios con el rígido.

## Aplicaciones.

*Ejemplo I.* Usando los ángulos de Euler expresar los vínculos que satisfacen dichos ángulos cuando la esfera rueda sin deslizar sobre un plano.

Las coordenadas del centro de masa son  $(x_G, y_G, 0)$

$$\bar{v}_p = 0 = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times (\bar{r}_p - \bar{r}_G)$$

En el sistema Oxyz  $\bar{r}_p - \bar{r}_G = -R\vec{k}$ .

Conviene usar  $\bar{\omega}$  en los ejes fijos.

$$0 = \begin{pmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi \\ \dot{\theta} \text{ sen } \varphi - \dot{\psi} \text{ sen } \theta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} + \text{cos } \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_G - R\dot{\theta} \sin \varphi + R\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi &= 0 \\ \dot{y}_G + R\dot{\theta} \cos \varphi + R\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi &= 0\end{aligned}$$

Al contrario de lo que ocurre con el vínculo de rodadura de un disco ,que es integrable

$$\dot{x} + R\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + R\theta = cte.$$

y por lo tanto holónomo. Los vínculos de rodadura de la esfera son no holónomos. No pueden ponerse como

$$\begin{aligned}f(x, y, \theta, \varphi, \psi) &= 0 \\ g(x, y, \theta, \varphi, \psi) &= 0\end{aligned}$$

en efecto si se pudiesen integrar , los vínculos se obtendrían

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \dot{\psi} = 0$$

lo que implica que las derivadas cruzadas de los coeficientes deben ser iguales. Por ejemplo

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta \partial x} \quad \text{o} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta \partial \psi} = \frac{\partial f}{\partial \psi \partial \theta}$$

La primer relación se cumple : es  $0 = 0$

la segunda

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \theta \partial \psi} &= R \cos \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial f}{\partial \psi \partial \theta} &= \frac{\partial r \sin \varphi}{\partial \psi} = 0\end{aligned}$$

no se cumple, por lo que los vínculos son no holónomos.

*Ejemplo II.* Una placa triangular isósceles con ángulo al vértice recto y de lado  $a$ , se mueve de modo que el vértice B se desplaza a lo largo del eje Oz, el lado AC está apoyado sobre el plano horizontal y C se mueve a lo largo de Oy. Calcular  $\omega$  en función de uno de los ángulos de Euler.

Los ejes solidarios se pueden describir usando los ejes intermedios por el origen Oxyz paralelos a los solidarios mediante los ángulos de Euler  $\varphi, \theta$ . El ángulo  $\psi$  es nulo.

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{K} + \dot{\theta} \vec{i} = \dot{\varphi} \vec{K} + \dot{\theta} \cos \varphi \vec{l} + \dot{\theta} \sin \varphi \vec{j}$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{\varphi} \cos \theta \vec{k} + \dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta \vec{j} + \dot{\theta} \vec{i} \\
\vec{r}_B &= O\vec{B} = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{K} = a \operatorname{sen} \theta \vec{K} \\
\vec{r}_A &= O\vec{A} = a \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \vec{I} - a \cos \theta \cos \varphi \vec{J} \\
\vec{r}_C &= O\vec{C} = \vec{r}_A + a \vec{i} = a(\cos \theta \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi) \vec{I} + a(\cos \theta \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi) \vec{J}
\end{aligned}$$

Como C se mueve sobre Oy

$$\begin{aligned}
\cos \theta \operatorname{tg} \varphi &= -1 \\
\Rightarrow \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} &= -\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} \\
\cos^2 \varphi &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \cos^{-2} \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \\
\Rightarrow \dot{\varphi} &= -\frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos^2 \theta} \dot{\theta} \\
\Rightarrow \vec{\omega} &= -\frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos^2 \theta} \dot{\theta} \vec{K} + \dot{\theta} \vec{i}.
\end{aligned}$$

*Ejemplo III.* Trompo simétrico con un punto fijo.

Los ejes Ox'y'z' son ejes principales ya que el eje Oz' es eje de simetría de revolución. O es un punto fijo del rígido. Los ángulos de Euler determinan completamente la posición del rígido:  $\theta$  da la inclinación del eje z',  $\varphi$  mide la precesión del trompo alrededor de la vertical y  $\psi$  mide la rotación del trompo respecto a su eje z'.

Sea  $l$  la distancia del centro de masas al punto fijo O. Luego

$$\Pi_O = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_1 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$$

por ser de revolución.

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \times \Pi_O \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_1 (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2$$

y

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} &= \dot{\varphi} \hat{e}_z + \dot{\theta} \hat{e}_\xi + \dot{\psi} \hat{e}_z \\
&= (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \hat{e}_z + (\dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi) \hat{e}_y + (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi) \hat{e}_x \\
\omega_x^2 + \omega_y^2 &= \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \dot{\theta}^2 \\
\omega_z^2 &= (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 \\
\Rightarrow T &= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2
\end{aligned}$$

y la energía potencial debida al peso:

$$U = Mgl \cos \theta.$$

Las fuerzas reactivas actúan en O fijo, entonces no realizan trabajo, por lo que la energía se conserva, o sea que

$$T + U = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + Mgl \cos \theta = E \quad (1)$$

es una ecuación de movimiento que solo involucra derivadas primeras de los ángulos de Euler.

Las otras dos ecuaciones del movimiento las obtendremos usando la segunda cardinal respecto de O:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O.$$

Como

$$\vec{M}_O = I \hat{e}_z \times (-Mg \hat{e}_z)$$

$$\vec{M}_O \cdot \hat{e}_z = 0$$

$$\vec{M}_O \cdot \hat{e}_{z'} = 0$$

$$\vec{L}_O = I_1 (\omega_x \hat{e}_{x'} + \omega_y \hat{e}_{y'}) + I_3 \omega_z \hat{e}_{z'}$$

$$\left. \frac{d(\vec{L}_O \cdot \hat{e}_{z'})}{dt} \right|_F = 0 \Rightarrow \vec{L}_O \cdot \hat{e}_{z'} = cte = L_\phi$$

$$\hat{e}_{z'} = \sin \theta \sin \psi \hat{e}_{x'} + \sin \theta \cos \psi \hat{e}_{y'} + \cos \theta \hat{e}_z$$

entonces

$$I_1 [(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) \sin \theta \sin \psi + (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) \sin \theta \cos \psi] + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = L_\phi \quad (2)$$

es la segunda ecuación de movimiento que nuevamente involucra solo derivadas primeras de los ángulos.

Finalmente

$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_F \cdot \hat{e}_{z'} = 0 = \left. \frac{d(\vec{L}_O \cdot \hat{e}_{z'})}{dt} \right|_F - \vec{L}_O \cdot \left. \frac{d\hat{e}_{z'}}{dt} \right|_F$$

pero

$$\vec{L}_O \cdot \left. \frac{d\hat{e}_{z'}}{dt} \right|_F = \vec{L}_O \cdot \vec{\omega} \times \hat{e}_{z'} = \vec{L}_O \cdot (\omega_x \hat{e}_{y'} - \omega_y \hat{e}_{x'}) = 0,$$

entonces

$$\bar{L}_o \cdot \hat{e}_{z'} = I_3 \omega_{z'} = I_3 (\psi + \phi \cos \theta) = cte = L_\psi \quad (3)$$

que es la tercer ecuación de movimiento buscada.

Las ecuaciones (2) y (3) permiten eliminar  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  en función de  $\theta$ :

$$(3) \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{L_\psi - I_3 \dot{\phi} \cos \theta}{I_3}$$

y sustituyendo en (2):

$$(I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + (L_\psi - I_3 \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta = L_\phi.$$

Es decir

$$\dot{\phi} = \frac{L_\phi - L_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (4)$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_\psi}{I_3} - \frac{(L_\phi - L_\psi \cos \theta) \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (5).$$

Obsérvese que hemos dividido por  $\sin^2 \theta$  que se anula para  $\theta = 0$ , por lo que debemos estudiar aparte el caso en que eje del trompo pasa por la vertical. No pretendemos hacer aquí por falta de tiempo un estudio completo de los posibles movimientos del trompo.

Nos limitaremos solo a mostrar algunos de sus posibles comportamientos.

Para ello usaremos la ecuación (1) y recordaremos que

$$\begin{aligned} I_3 \omega_{z'} &= L_\psi \\ \Rightarrow \frac{1}{2} I_3 \omega_{z'}^2 &= \frac{L_\psi^2}{2I_3} = cte \\ E' &= E - \frac{1}{2} I_3 \omega_{z'}^2 = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + Mgl \cos \theta \end{aligned}$$

y sustituyendo  $\dot{\phi}$

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(L_\phi - L_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta = E'$$

que puede escribirse como

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V_{ef}(\theta) = E'$$

con



$$V_{ef}(\theta) = \frac{(L_\phi - L_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta.$$

En general el movimiento estará comprendido entre los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Para  $E = E'_2$ , energía igual a  $V_{ef}$  mínima, el ángulo es fijo  $\theta = \theta_0$ .

$$V'_{ef}(\theta) = -\frac{(L_\phi - L_\psi \cos \theta)^2}{I_1 \sin^3 \theta} \cos \theta + \frac{L_\psi \sin^2 \theta (L_\phi - L_\psi \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} - Mgl \sin \theta$$

$$V'_{ef}(\theta_0) = 0$$

Sea  $x = L_\phi - L_\psi \cos \theta_0$ , entonces

$$\cos \theta_0 x^2 - L_\psi \sin^2 \theta_0 x + Mgl I_1 \sin^4 \theta_0 = 0.$$

Ahora,  $x$  debería ser real, por lo tanto

$$L_\psi^2 \sin^4 \theta_0 - 4 \cos \theta_0 Mgl I_1 \sin^4 \theta_0 \geq 0$$

$$I_3^2 \omega_z^2 = L_\psi^2 \geq 4 Mgl I_1 \cos \theta_0$$

$$\omega_z \geq \frac{2}{I_3} \sqrt{Mgl I_1 \cos \theta_0}.$$

El trompo girará con inclinación fija solo si su velocidad angular de rotación alrededor de su eje de simetría es mayor que cierto valor límite que crece con  $\sqrt{\cos \theta_0}$ . Si  $\theta_0 \geq \pi/2$  no hay velocidad angular límite, siempre es posible el movimiento con ángulo constante.

Si  $E' > E'_2$  el movimiento se produce entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$ :  $\theta_1 \geq \theta \geq \theta_2$ : La ecuación (4) permite ver que  $\dot{\phi}$  puede en algunos casos cambiar de signo. Puede darse tres situaciones según  $\dot{\phi}$  sea siempre positiva, se anule para  $\theta = \theta_1$ , o que cambie de signo y  $\dot{\phi}|_{\theta_2} < 0$  mientras que  $\dot{\phi}|_{\theta_1} > 0$ .

Dichas situaciones se representan gráficamente en las siguientes figuras descritas por la intersección del eje de simetría del trompo con una esfera.

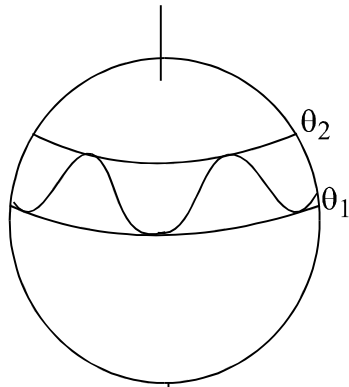


fig 2

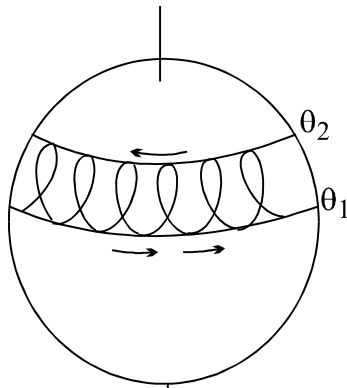


fig 3

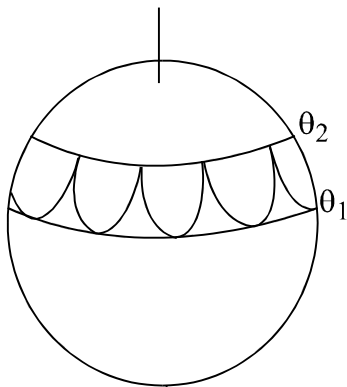


fig 4